Science énergicale

"Inconscience sans conscience n'est que ruine de la science"

Gianni Mocellin

Straco
www.straco.ch
24.01.2026, 05h00

Introduction

Le but ultime de la science consiste à

comprendre pour survivre

Modeliser et simuler (S)

Entitales, transitales et positales

Pour concevoir

un modèle

un scientifique doit commencer par définir

un univers

ainsi que

une région d'univers

délimité par

une frontière

Supposons que l'univers considéré soit la terre

On peut y identifier

un pays

délimités par

une frontière

Pendant

n'importe quelle durée

la population habitant le pays, c'est-à-dire *le nombre d'individus y habitant*

autrement dit

le nombre d'entités y habitant

autrement dit encore

une variable entitale

Cette population présente

des transformations

qui sont

une fonction de deux quantités variables

à savoir de

- la différence par unité de temps entre les naissances et les décès, que l'on peut qualifier de

endo-transitale de population

autement dit encore

une variable endotransitale

et de

- la différence par unité de temps entre le nombre d'entrants et de sortants à travers la frontière

c'est-à-dire de

une exo-transitale de population

autrement dit encore

une variable exotransitale

En notant utilisant la notation

∂

pour

différentielle

on en considérant

la différentielle d'une idée

qu'on peut noter

∂ / ∂idée

un bilan global de population vaut

∂population / ∂temps

=

endotransitale - exotransitale

Le taux de variation temporel de la population est égal à

sa différentielle temporelle

qu'on peut noter

∂population / ∂temps

ou encore

∂population / ∂t

Cette différentielle temporelle vaut la différence entre les taux nets d'endotransitale et d'exotransitale

On peut

faire tendre la surface du pays vers zéro

auquel cas le pays se résume en

un point

et on peut étudier la population en ce point, en cette position

La population peut donc être considérée

en un point

autrement dit comme

une variable positale

autrement dit encore comme

une posité

Si la surface du pays n'intervient pas la population peut être représentée par

un nombre

c'est-à-dire le nombre d'individus présents dans le pays et ce nombre qui est en fait une variable positale varie dans le temps

On a donc un rapport

∂positale / ∂temps

représentant la variation de ce nombre dans le temps

On a donc aussi

∂endotransitale / ∂temps

comme taux interne net de population, c'est-à-dire la différence entre

le nombre apparaissant localement par unité de temps

et

le nombre disparaissant localement par unité de temps

et

∂exotransitale / ∂temps

le taux net de population transitant à travers la frontière, c'est-à-dire la différence entre

- le nombre entrant dans le pays par unité de temps

moins

- le nombre sortant du pays par unité de temps

Si

un tel bilan global peut être conçu pour n'importe quel nombre

alors

le concept de bilan doit donc avoir certaines propriétés importantes

Si on considère un système constitué de deux pays on constate que

en cas de fusion de deux pays

les populations c'est-à-dire

les transitales

peuvent être

additionnés

Deux autres exemples d'idées transitales, pouvant faire l'objet d'un bilan et donc d'une simple addition seraient

l'idée de volume

ou

l'idée d'énergie

Ces deux transitales peuvent en outre être considérés comme des prototypes de transitales

Si on considère

un système économique très simple

on constate qu'en général

un certain facteur, le prix

influence le transit de

un certain produit

entre

deux marchés potentiels

On constate également que le produit

transite vers

le marché dans lequel le prix est

le plus haut

On constate aussi que

le transit de produit

persiste tant que le prix n'est pas égalisés entre les deux marchés

On en déduit que

la différentielle de prix

est

ce qui fait bouger le produit d'un marché à l'autre

Pour un produit donné

la condition d'équilibre

autrement dit de

transit de produit nul

est un niveau de prix uniforme dans les deux marchés

Il est clair que si les deux marchés fusionnent les prix ne seront pas additionnés mais

égalisés

Le prix est une quantité locale, ponctuelle, autrement dit

une variable positale

autrement dit encore

une posité

puisqu'il est caractéristique de

une position dans l'univers économique considéré

La relation économique fondamentale est donc celle qui existe entre

variables positales

autrement dit entre

posités

et

variables transitales

autrement dit entre

transités

Le classement des quantités en deux classes, les positales et les transitales, est fondamental pour

comprendre les similitudes entre phénomènes quelconques

mais également pour

faire des raisonnements corrects

Cette classification en deux grands groupes facilite

la systématisation de la connaissance scientifique

et permet en outre de faire

des comparaisons

et

des métaphores

entre domaines scientifiques

En dynamique des fluides par exemple

une partie d'un univers fluide

peut être représentée sous forme de système en considérant

- son volume

- sa masse

et

- son énergie

Si

deux parties de l'univers fluide sont réunies

alors

le volume, la masse et l'énergie

du système global résultant valent

la somme des volumes, des masses et des énergies partielles

Réciproquement, si l'univers est découpé en parties

son volume, sa masse et son énergie

sont réparties entre

les parties résultantes

En supposant que la répartition du fluide dans l'univers considéré soit homogène, c'est-à-dire que sa masse soit uniformément répartie, alors

la moitié d'un volume initial

contiendra

la moitié de la masse initiale

ainsi que

la moitié de l'énergie initiale

Plus généralement on peut dire que

la proportion entre

une partie différentielle du volume qu'on peut représenter par

∂volume

en utilisant la notation ∂ pour noter *la différentielle*

et le volume total qu'on peut noter

volume

sont liés par une proportion

proportion

=

volume / ∂volume

La masse du système initial est également liée à sa différentielle de masse dans cette même proportion

proportion

=

masse / ∂masse

Et il en va de même pour la différentielle de l'énergie globale du système

proportion

=

énergie / ∂énergie

En d'autres mots, *volume, masse* et *énergie* sont reliées par ce que les mathématiciens appellent

une relation homogène linéaire

c'est-à-dire que l'accroissement de chacune d'elles par un facteur

proportion

implique

un accroissement des deux autres selon la même proportion

Le volume, la masse et l'énergie sont

des quantités additives similaires

c'est-à-dire que ce sont bien

des variables transitales

autrement dit

des transités

Généralement parlant, l'état d'un système peut être décrit en termes de

un nombre fini de transitales mutuellement indépendantes

Comme il existe en principe

un nombre infini de transitales dans la nature

les transitales sélectionnées par un scientifique pour comprendre un phénomène quelconque sont simplement celles qui lui semblent

pertientes

pour comprendre le phénomène

En outre, chacune de ces transitales obéit à

une loi de conservation

Un système fermé, un cube par exemple, peut être considéré comme

un système totalement isolé de son environnement

c'est-à-dire que toute interaction entre le cube et son environnement soit exclue

La masse et l'énergie contenue dans le cube sont

conservées

Il en va de même pour

le volume du cube

bien que pour un cube fermé ce volume représente une espèce de conséquence de la conservation de la masse et de l'énergie

Si on considère deux systèmes comme deux cubes qui peuvent

interagir entre eux

et que

l'ensemble des deux systèmes

soit totalement isolé de l'environnement alors les deux systèmes considérés ensemble forment également

un système fermé, isolé

Si on considère deux systèmes ainsi que la frontière qui les sépare on constate que

volume1 + volume2

masse1 + masse2

et

énergie1 + énergie2

sont les variables transitales, autrement dit les transités du nouveau système fusionné

En d'autres mots encore, on peut dire que si l'énergie de l'un des deux systèmes

- s'accroit d'une certaine quantité

alors l'énergie de l'autre

- décroit de la même quantité

Le système fusionné ne modifiera son état initial que si

les états initiaux des deux parties du système fusionné

sont dans des états différents au début de l'interaction, c'est-à-dire encore que les deux systèmes n'étaient pas *en équilibre*

On constate aussi que dans la nature, tous les systèmes sont

dynamiques

sans aucune exception

Pour caractériser de tels systèmes, un scientifique doit

- comprendre les forces provoquant ce dynamisme

et

- comprendre comment ces forces sont reliées à l'état du système

Si un système est constitué de

deux sous-systèmes séparés par une frontière

comme deux cubes en contact par exemple

on constate que l'état final du système global dépend de

- l'état initial des deux systèmes

et de

- la nature de la frontière qui les sépare

Si

la frontière est un isolant parfait

empèchant le passage de transitales entre les deux sous-systèmes

alors

l'état initial persiste

puisque

la frontière fait des deux systèmes des systèmes eux-même fermés sur eux-mêmes

Si on considère par exemple

un piston pouvant bouger dans un cyclindre horizontal

c'est-à-dire une frontière

imperméable et sans frottement

entre deux sous-systèmes

Si

le cylindre horizontal contient du gaz et est fermé à ses deux extrémités

on constate que le piston permet

une interaction mécanique

entre les deux gaz contenus dans le cylindre

Si

les pressions initiales des deux gaz ne sont pas égales

on constate que

le piston bouge depuis hautes pressions vers les basses pressions

jusqu'à ce que les pressions soient égales des deux côtés

Les deux pressions dans le système global

à l'équilibre

sont égales dans les deux sous-systèmes

Lors du processus d'égalisation

- *le gaz de gauche en haute pression*

exerce

un travail mécanique

sur

- le gaz de droite en basse pression

et comme résultat final on constate que

- la pression dans le gaz de gauche a diminué

et que

- le volume du gaz de gauche a augmenté

Réciproquement on constate que pour le gaz de droite

- sa pression a augmenté

et

- son volume a diminué

On peut aussi dire que

la variation d'énergie dans les gaz

est égale au

travail mécanique fourni par le piston

ce qui peut s'écrire en termes de deux différentielles

∂énergie

=

*-pression * ∂volume*

On constate que le différentiel d'énergie est

- proportionnel au différentiel de volume

et que

- le coefficient de proportionnalité des différentielles est égal au négatif de la pression

Dans tout système mécanique ce coefficient

pression

représente la relation entre

- *la différentielle d'énergie*

et

- *la différentielle de volume*

Si on considère comme autre exemple

un fil électrique conducteur

permettant

une interaction électrique entre deux points d'un circuit électrique

c'est-à-dire un fil permettant le déplacement de charges électriques depuis

- *un point de haut potentiel électrique*

vers

- *un point de bas potentiel électrique*

On peut laisser le fil jusqu'à ce que les potentiels électriques des deux points qu'il relie s'égalisent

Au cours de l'égalisation

le point se trouvant au potentiel plus élevé

exerce un travail électrique sur

le point de potentiel plus faible

ce qui modifie à la fois la répartition des charges et de l'énergie

En termes de différentielles on peut écrire

∂énergie

=

*potentiel * ∂charge*

La différentielle d'énergie est proportionnelle à la différentielle de charge et le coefficient de proportionnalité est le potentiel électrique

Dans tout système électrique ce potentiel représente la différentielle d'énergie liée à une différentielle de charge

Si on considère encore un autre exemple comme la frontière existant entre

l'état liquide

et

l'état vapeur

d'une certaine quantité d'eau bouillant dans une casserole, on constate que certaines molécules d'eau passent de l'état liquide à l'état vapeur jusqu'à ce que les deux systèmes de la casserole et de son environnement atteignent un équilibre

Lors du processus d'évolution vers l'équilibre

la partie liquide

exerce un travail chimique sur

sur la partie vapeur

Comme résultat les énergies et les masses des deux systèmes varient et le rapport de leurs différentielles vaut

∂énergie

=

*potentiel-chimique * ∂masse*

La différentielle d'énergie est proportionnelle à la différentielle de masse et le coefficient de proportionnalité est le potentiel chimique

Dans un système chimique ce coefficient représente la quantité d'énergie liée à un changement de masse

Les potentiels chimiques dans deux systèmes chimiques en équilibre chimique sont égaux

Si

le système chimique est un système multi-composants c'est-à-dire un mélange de substances chimiques

alors

chaque composant a un potentiel chimique différent

En traitant les composants individuels séparément et en les distinguant par

un nom matérialisé par un suffixe numérique

on trouve que la différentielle de masse de chaque composant contient une différentielle d'énergie lui correspondant

$\partial énergie_i$

=

$potentiel\text{-}chimique_i * \partial masse_i$

Pour les *n* composants mélangés ensemble l'énergie totale du système vaut

$\partial énergie$

=

$somme_{i=1..n} (énergie_i)$

=

$somme_{i=1..n} (potentiel\text{-}chimique_i * \partial masse_i)$

Selon les considérations ci-dessus on peut dire que

toutes les interactions entre deux systèmes

entre deux cubes par exemple, supposent

des différentielles d'énergie

On peut aussi dire que

la caractéristique commune de toutes les interactions entre systèmes

est qu'elles dépendent d'une part de

- la différentielle d'une certaine variable positale pertinente

et d'autre part de

- la nature de la frontière qui les sépare

La vie quotidienne montre néanmoins qu'il existe

un type particulier d'interaction

où

les systèmes échangent simplement de l'énergie entre eux

Plus précisément on peut dire que

les systèmes échangent seulement leurs énergies internes

toutes les autres variables transitales restant constantes

Ce type d'interaction est généralement qualifié de

iinteraction thermique

Dans ce cas la différentielle d'énergie est simplement équivalente à

une quantité de chaleur

soit en termes de termes abbrégés

∂énergie

=

chaleur

Par analogie avec les considérations précédentes on peut dire que

la température

est la variable positale qui détermine

le flot d'énergie

lors de

une interaction thermique

On peut la noter

T

en abbrégé

Le rôle de la température dans une interaction thermique est donc similaire à ceux de

- la pression dans les interactions mécaniques

ou du

- potentiel électrique dans les interactions électriques

Plus généralement on peut dire que si

- les valeurs initiales de variables positales sont différents dans les deux systèmes interragissants

alors

- l'énergie va transiter à travers la frontière séparant les deux systèmes jusqu'à ce que les valeurs des positales s'égalisent dans les deux systèmes

Ainsi la température dans un système thermique constitué de deux systèmes thermiques à l'équilibre doit être égale dans les deux sous-systèmes

Lors du processus d'égalisation

le système de gauche

exerce un travail sur

le système de droite

sous forme de

chaleur

Comme résultat le contenu énergétique du système de gauche diminue et celui de droite augmente

On peut donc considérer par analogie que

la différentielle d'énergie thermique

impliquée dans une interaction thermique peut être représentée comme une produit d'une positale, la température, par une transitale, que l'on peut appeler

entropie

En conséquance on a la représentation suivente d'une interaction thermique

∂énergie

=

*température * ∂entropie*

Le rôle de l'entropie dans l'interaction thermique est le même que ceux du volume, de la masse et de la charge dans les interactions précédentes

Cela revient à dire que l'entropie est la variable transitale dont la différentielle dans un système donné est proportionnelle à la différentielle d'énergie

En généralisant encore on peut assigner à tout type d'interaction entre systèmes

une différentielle de variable transitale

multipliée par

une variable positale

vaut

une différentille d'énergie

La signification de variables positales comme le sont

- la pression

- le potentiel électrique

- le potentiel chimique

- la température

est double car

- elles lient une différentielle d'énergie à une différentielle de transitale

et

- elles tendent à s'égaliser lors d'une interaction spontanée entre deux systèmes

En d'autres mots

- l'énergie va transiter de l'un des systèmes interagissants dans l'autre

et

- le flot d'énergie va continuer jusqu'à ce que l'équilibre des positales soit atteint

En physique et en chimie, les variables positales sont traditionnellement appelées

potentiels

Ainsi

- -p est le potentiel mécanique

- μ est le potentiel chimique

- T est le potentiel thermique

etc.

La caractéristique commune de tous ces potentiels, de toutes ces positales tendant à l'équilibre ,est qu'ils sont

indépendants de la taille du système considéré

Si

un système à l'équilibre est découpé en parties

alors

les valeurs des variables positales dans toutes les nouvelles parties seront les mêmes que ce qu'elles étaient dans le tout initial

Si par exemple

la température d'un système

est conçu comme une fonction des variables transitales décrivant le système comme son volume, sa masse et son énergie, c'est-à-dire

température

=

fonction (volume, masse, énergie)

et que le système est étendu en lui additionnant un autre système identique, alors la valeur de

température

demeure inchangée dans le nouveau système

Dit en termes mathématiques la variable

la variable température

correspond à

une fonction homogène d'ordre zéro des variables transitales

Les quantités qui satisfont de telles fonctions des variables transitale peuvent donc bien être qualifiées de variables positales

On constate aussi qu'on peut concevoir

une infinité de variables positales

pouvant être définies sous forme de en faisant le rapport entre deux variables transitale comme

énergie / volume

par exemple, c'est-à-dire le rapport de

une unité d'énergie

à

une unité de volume

qu'on peut aussi appeler

énergie volumique

ou

densité énergétique

On peut aussi considérer comme variable positale le rapport

masse / volume

c'est-à-dire unité de masse par unité de volume qu'on peut aussi appeler

masse volumique

ou

densité massique

De manière générale

le rapport de deux variables transitales

permet de concevoir

une variable positale

Les positales dérivées conçues comme des rapport de transitales n'ont pas une signification scientifique directe et primaire, mais sont tout à fait acceptables scientifiquement comme positales

On peut ainsi dire que

toute interaction particulière

possède

une transitale et une positale propres

On a vu que

la tendance à une égalisation des positales

est critique dans toute interaction

Si la frontière séparant deux systèmes est enlevée alors des entités vont

transiter d'un système dans l'autre sous forme de transitales

jusqu'à ce que des positales pertinentes soient égalisées, après quoi les deux systèmes seront à l'équilibre

Entre deux systèmes capables d'interaction, l'équilibre se fait si et seulement si une distribution uniforme des positales est atteint

On peut qualifier une telle idée de

loi zéro de la thermodynamique

Aucune explication supplémentaire n'est nécessaire pour comprendre le fait que

si

deux systèmes sont en interaction de plusieurs manières

alors

le changement d'énergie est égal à la somme des changements d'énergie des interactions individuelles

Par exemple, si deux systèmes sont en interaction mécanique et thermique, le changement d'énergie en termes de différentielles ∂ vaut

∂énergie

=

-pression∂volume + température*∂entropie*

=

travail + chaleur

qui est la somme des différentielles d'énergie dues à la différentielle de volume et à la différentielle d'entropie

On peut qualifier cette relation de

première loi de la thermodynamique

En fait, la première loi de la thermodynamique n'a cette forme que si on considère uniquement deux interactions possibles entre les deux systèmes, c'est-à-dire une interation mécanique et une interaction thermique

En introduisant un troisième type d'interaction, la chimique, on obtient la relation différentielle suivante

∂énergie

=

*-pression * ∂volume + température * ∂entropie + somme(potentiel-chimique*$_i$ ** ∂masse*$_i$*)*

De manière générale

- s'il y a *n* interactions entre deux systèmes

et

- si la *jème* interaction a pour positale *positale*$_j$ provoquant le changement de tranitale *transitale*$_j$ on a

∂énergie

=

somme $_{j=1..n}$ *(positale*$_j$ ** ∂transitale*$_j$*)*

Cette équation représente bien le fait que

les n interactions combinées

ne produisent

ni anihilation ni création d'énergie

Si on considère la différentielle d'énergie représenté par

∂énergie

=

*-pression * ∂volume + température * ∂entropie + somme(potentiel-chimique*$_i$ ** ∂masse*$_i$*)*

on peut considérer la différentielle d'énergie

∂énergie

comme une proportion de l'énergie totale du système

∂énergie

=

énergie / proportion

ou encore l'énergie totale comme une proportion de la différentielle d'énergie

énergie

=

*proportion * ∂énergie*

En se souvenant qu'à l'équilibre

toute positale

est une fonction homogène d'ordre zéro des transitales

On constate ainsi que la différentielle de toute variable transitale modifiée par un facteur

proportion

accroitra toutes les autres transitales dans la même proportion alors que les variables positales resteront inchangeés

En multipliant les deux côtés de l'équation par le facteur

proportion

on trouve toujours

énergie

=

*-pression * volume + température * entropie + somme(potentiel-chimique*$_i$ * *masse*$_i$*)*

Ceci montre que l'énergie d'un système peut être conçue comme la somme des énergies échangées lors des interactions dont le système est capable

énergie

=

$somme_{j=1..n} (positale * transitale_j)$

On peut appeler cette relation

équation fondamentale de la thermodynamique

Chaque terme de l'expression de l'énergie totale est le produit d'une positale par une transitale toutes deux caractéristiques d'une interaction possible

Une telle constatation permet de comprendre que lors de l'analyse scientifique d'un système le point de départ doit être

une liste de toutes ses interactions possibles entre le système et son environnement

Cette lliste doit être composée des variables positales et des variables transitales de chaque interaction

A partir de là il est facile pour le scientifique de caratériser les états et les différentielles d'état d'un système

La différentielle d'énergie vaut

∂énergie

=

$somme(_{j=1..n}\ positale_i * \partial transitale_j + transitale_j * \partial positale_j)$

Si on note l'entropie par

S

on obtient la relation suivante pour tout système thermodynamique

$$\partial énergie$$

$$=$$

$$-p * \partial V + T * \partial S + \mu * \partial m$$

$$+$$

$$V * \partial p + S * \partial T + m * \partial \mu$$

En combinant cette équation avec l'équation

$$\partial énergie$$

$$=$$

$$-p * \partial V + T * \partial S + \sum \mu_i * \partial m_i$$

représentant la même différentielle d'énergie on trouve que

$$V * \partial p + S * \partial T + m * \partial \mu$$

$$=$$

$$0$$

ou de manière générale

$$somme({}_{j=1..n}\ positale_j * \partial transitale_j)$$

$$=$$

$$0$$

Cela revient à dire que le terme

$$positale_j * \partial transitale_j$$

participe à la différentielle d'énergie alors que le terme

$$transitale_j * \partial positale_j$$

s'annule, leur somme valant toujours 0

On peut noter que les termes de l'équation de différentielle d'énergie que sont

$-p * \partial V$

travail mécanique

$- T * \partial S$

travail thermique

et

$- \mu * \partial m$

travail chimique

ne sont pas

des formes d'énergie

bien qu'ils aient les mêmes unités qu'une énergie mais

des formes de transfert d'énergie

c'est-à-dire

des formes de puissance

L'énergie est une quantité assignée à un état d'un système alors que le travail, la chaleur etc. sont assignés à des changements d'état d'un système

La chaleur est donc un concept analogue à un travail plutôt qu'à une énergie, un concept dérivé plutôt qu'un concept fondamental

Sa taille n'est pas uniquement déterminée par les états initiaux et finaux du système comme l'est la taille de l'énergie

La chaleur dépend aussi du processus effectif de changement d'état

Ceci n'est pas une remarque terminologique mais une distinction claire entre deux idées différentes à savoir que

- l'énergie (un paramètre d'état d'un système) est distincte de la chaleur, du travail, etc. qui se réfèrent à

- des interactions entre systèmes et non à des caractéristiques du système

Parler de

contenu calorifique d'un corps

est aussi dénué de sens que de parler de son

contenu de travail

Les propriétés d'un système qui subissent un transit, un transport, un transfert, sont des transitales

proportionnelles au contenant qui les contient

Ce sont par conséquent des variables additives

Les positales sont quant à elles

indépendantes du contenant (intensives)

et elles contrôlent

les flots de transitales (extensives)

caractérisant une interactions

Tout flot de transitale est donc motivé, entrainé, guidé, poussé, mu, dirigé, actionné, dû à, axé sur, stimulé par, induit par

une différentielle de la positale qui lui correspond

La valeur numérique de la positale relie

- la différentielle d'énergie de l'interaction

à

une différentielle du contenu, de la transitale (extensive) correspondante

La condition nécessaire et suffisante pour un équilibre est d'avoir

une distribution uniforme de toutes les positales caractérisant toutes les interactions possibles

Si on considère deux systèmes isolés chacun en équilibre et qu'on fusionne les deux systèmes le nouveau système sera en équilibre si et seulement si les positales des parties individuelles du système étaient égales avant la fusion

S'il y a ne serait-ce qu'une seule positale qui ne soit pas égale dans les deux systèmes, la fusion initie une interaction, matérialisée par un flot de transitales

Les interactions sont en outre

interdépendantes

Par exemple si le potentiel chimique est égal dans deux systèmes mais que la température ne l'est pas alors il y aura un flot de masse, un phénomène connu sous le nom de

thermodiffusion

Ainsi l'inhomogénéité ne serait-ce que d'une seule positale comme la température est suffisante pour générer un flot de plusieurs transitales (extensives)

L'équilibre ne se produit que si et seulement si toutes les positales sont égalisées que si leur distribution est devenue uniforme

Bilans (continuité, conservation)

La distinction entre posales et universales n'est pas que purement formelle

Son essence est de permettre de décrire quantitativement les interactions entre systèmes en termes de ces quantités

Considérons un système de volume

volume

interagissant avec son environnement

L'état du système peut être décrit en termes d'un nombre fini *i* d'universales

$universale_i$

Le changement temporel d'une universale dans le système peut être du à une ou deux causes

- une endoversale d'universales dans le système

ou

- un flot d'universales dans le système ou à travers la frontière du système

Si la $i_{ème}$ universale est sujette à

une loi de conservation

comme le sont l'énergie, la masse, l'élan (momentum) etc. alors on peut supposer qu'aucune endoversité

endoversité$_i$

n'existe

A noter que l'idée de conservation n'est valable que pour

les systèmes globaux

et non pour

les composants d'un tel système pris séparément

les composants pouvant être convertis en d'autres composants comme dans une réaction chimique ayant lieu dans un système

Ainsi dans un système fermé si

endoversité$_i$

denote le taux d'accroissement du $i_{ème}$ composant alors cet accroissement doit être compensé par une diminution équivalente d'un autre composant

Des endoversités positives peuvent être considérées comme des sources et des endoversités négatives comme des puits

Les endoversitées de diverses formes d'énergie peuvent être interprétées de manière similaire

Les entrées et les sorties représentent quant-à-elles des taux d'entrée et de sortie d'une versalité à travers la frontière de système

Par convention les sorties sont souvent considérées comme positives et les entrées comme négatives

Il est ainsi possible d'écrire

un bilan

c'est-à-dire

une équation de continuité

concernant la $i_{ème}$ universalité uni*versalité$_i$* présente dans le volume *volume*

∂universalité$_i$ / ∂t

=

endoversalité$_i$ - transversalité$_i$

Une considération très pertinente émerge en se souvenant de la tendance à une égalisation des posales

Bilan intégral

Le flot de toutes transale est du à une inhomogénéité d'au moins une posale

Dans un système mécanique de centre de masse au repos cela signifie ce sont ces posales qui déterminent la direction des flots de transversales

Un flot général peut s'écrire

transversalités$_i$

=

*conductivité$_i$ * (posalité$_i$ - posalité$_{i0}$)*

où l'expression entre parenthèses est un différentiel de posale et le coefficient *conductivité$_i$* est la conductivité correspondante, autrement dit le coefficient de transit, de transfert, de transport

Clairement, même si on a

un même différentiel de posalité

alors

le flots de versalité

sera différent selon la conductivité

Les coefficients de transition, les conductivités, sont des propriétés matérielles du système

Les matières de faible conductivité par rapport au flot d'une universalité donnée peuvent être considérés comme des isolants de l'universalité en question

Les isolants sont très importants en pratique car ils sont utilisés pour diriger le flot d'universalité dans une direction désirée

A tel point qu'un des buts de la science est la recherce des meilleurs isolants permettant d'assurer, dans les limites du possible, la direction et le controle les plus efficaces des universalités individuelles

Par exemple, un flot thermique peut se représenter par

énergie

=

*conductivité * (température - température$_0$)*

Un courant électrique électrique peut se représenter par

courant

=

*conductivité * (potentiel - potentiel$_0$)*

où *conductivité* est l'inverse de la résistance électrique

Un flot de diffusion chimique peut se représenter par

flot

=

*conductivité * (potentiel-chimique - potentiel-chimique$_0$)*

où *conductivité* est le coefficient de diffusion chimique

Un flot volumique de liquide imcompressible peut s'exprimer comme

flot

=

*conductivité * (pression - pression$_0$)*

où *conductivité* est la conductivité volumique

Chacun des cas ci-dessus implique

l'égalisation d'une posalité comme

température, voltage, potentiel chimique, pression

obtenue par un flot d'une universalité comme

énergie interne, charge électrostatique, masse, volume

Certains phénomènes existent où le flot d'une universalité est généré par l'inhomogénéité d'une posalité autre que la posalité correspondant directement à l'universalité

Par exemple, dans la thermodiffusion le flot de masse est provoqué par une différence de température

Le cas opposé d'un flot d'énergie interne du à une différence de densité existe

De tels effets sont globalement connus sous le nom de

phénomènes thermochimiques

D'autre phénomènes représentant de tels effet croisés incluent la thermoélectricité, l'électrocinétique, etc.

Chauffer un joint entre deux métaux différents génère une force électromotrice, principe du thermocouple

Faire passer un courant dans un joint métallique de ce type provoque un échauffement ou un refroidissement selon la direction du courant

L'interaction entre phénomènes électriques et magnétiques est également bien connue

Pour un scientifique généraliste la constation est évidente que les flots sont controlés par les inhomogénéités de toutes les posales et non pas seulement par la posale correspondant directement à la versitale

$$\textbf{\textit{transversalité}}_i$$

$$=$$

$$\textit{somme}_{k=1...n-1}(\textit{conductivité} * (\textit{posalité}_k - \textit{posalité}_{k0}))$$

où *conductivité* est la conductivité du système par rapport au flot de la $i_{ème}$ universalité selon le différentiel de la $k_{ième}$ posalité

La somme s'étend sur les n-1 positales indépendantes

***

La thermodynamique stipule qu'en unissant deux systèmes le système résultant reste en équilibre si et seulement si chacune des posales d'une partie du système est égale à la même posale dans l'autre partie du système

Le différentiel d'une seule posalité est suffisant pour déclencher le flot d'universalités diverses

L'équilibre ne s'établit que quand toutes les posalités ont été égalisées

La formule générale tient donc compte des effets croisés

En combinant l'équation de bilan global

$$\partial \textit{universalité}_i / \partial t$$

$$=$$

$$\textit{endoversalité}_i - \textit{transversalité}_i$$

avec l'équation de flot

$$\textbf{\textit{transversalité}}_i$$

$$=$$

$$\textit{somme}_{k=1..n-1} (\textit{conductivité} * (\textit{posalité}_k - \textit{posalité}_{k0}))$$

on obtient l'équation de bilan intégrale

$$\partial \textit{universalité}_i / \partial t$$

$$=$$

*endoversalité$_i$ - somme$_{k=1..n-1}$ (conductivité * (posalité$_k$ - positalité$_{k0}$))*

La première partie de l'équation est le taux de changement temporel de la $i_{ème}$ universalité

La seconde partie est la différence entre

- le taux de variation interne de la *ième* universalité, l'endoversalité

et

- la somme des flots entrants ou sortants dus aux posalités

Aucune expression d'une telle généralité ne peut être conçue pour le taux

endoversalité$_i$

figurant dans l'équation

On peut simplement dire que le taux d'endoversalité est un taux de production (création, naissance) ou de consommation (destruction, mort) de l'universalité présente dans le système

Dans de nombreux cas le phénomène envisagé est tel qu'il est suffisant d'utiliser le bilan intégral

∂universalité$_i$ / ∂t

=

*endoversalité$_i$ - somme $_{k=1..n-1}$ (conductivité * (posalité$_k$ - posalité$_{k0}$))*

considérant le système comme un tout

C'est le cas quand un scientifique est concerné uniquement par la réponse temporelle d'un phénomène et pas particulièrement intéressé par la distribution des paramètres individuels au sein du système

En d'autres mots, le bilan intégral est applicable s'il est justifié de considérer le système comme ponctuel et d'étudier tous ses changements d'état uniquement selon la dimension temporelle, communément connue sous le nom de

approximation à zéro dimension

Bilan différentiel

Une autre manière de modéliser consiste à analyser

la variation universelle

c'est-à-dire la distribution des différentes universalités

Dans ce cas

l'équation de bilan intégral

doit être remplacée

une équation de bilan différentiel

Pour obtenir cette équation les universalités décrivant l'entier de l'univers du système doivent être remplacées par des quantités ponctuelles

Les équations de bilan différentiel peuvent être trouvées de différentes manières par une scientifique

- soit en trouvant les équations dans des références existantes

- soit en les dérivant lui-même de principes fondamentaux

Ces deux approches sont aléatoires

La première approche n'est pas toujours fructueuse (successfull) puisque des problèmes non résolus existent et de nombreuses équations existantes mènent à de sérieuses erreurs si le scientifique essaye d'appliquer une équation dont les exigences (requirements) ne sont pas satisfaites dans le cas particulier

La seonde approche nécessite un niveau cognitif et mathématique partagé par peu de scientifiques

En considérant superficiellement la seconde approche il peut sembler que la représentation de tout phénomène nécessite un traitement particulier

Mais une analyse approfondie montre qu'il est possible de recourir à (to resort to)

une méthode générale

grace à laquelle les caractéristiques spéciales de tout phénomène particulier deviennent clairement définies dans une équation qui peut être directement dérivée du bilan intégral

$$\partial densalité_i / \partial t$$

$$=$$

$$endoversalité - somme_{k=1..n-1} (conductivité * (posalité_k - posalité_{k0}))$$

Une telle méthode considère

des quantités locales

qu'on a appelées

densalités

assignées à chaque point du système plutôt que des quantités globales caractérisant le système comme un tout

La valeur locale de la $i_{ème}$ universalité $universalité_i$ est sa densité, sa concentration *densalité*

Par définition la quantité d'une universalité $universalité_i$ contenue dans un volume vaut

l'intégrale sur le volume de sa concentration, de sa densité

$$universalité_i$$

$$=$$

$$somme_{volume} (universalité_i * \partial volume)$$

La somme (libération, rejet, déversement, relaxation, réglage, naissance, apparition) de toutes les endoversalités présentes dans le volume (dans la région) peut de manière similaire être caractérisée en termes de densité

$$universalité_i$$

$$=$$

$$somme_{volume} (endoversalité_i * \partial volume)$$

Le transit (flot, migration) d'universalité

***transersalité**$_i$*

à travers la frontière limitant la région (le volume) peut être caractérisée en termes de densité de transit (courant, flot) à travers la frontière

***transversalité**$_i$*

=

somme$_{frontière}$ universalité$_i$ * ∂***frontière***

La différence locale entre les posalités *posalité$_k$*, une mesure de leur inhomogénéité, peut être décrite en termes de différentielle des quantités unité ***e**$_i$* selon les axes concernés

différentielle

=

*e1 * ∂/∂x1 + e2 * ∂/∂x2 + e3 * ∂/∂x3*

Si la posalité en question est un nombre (scalaire) en lui appliquant la différentielle (nabla) donne une verso-quantité

***transversalité**$_i$*

=

différentielle * *posalité$_k$*

De même le transit (flot) de densitale de la *i$_{ème}$* universalité

universalité$_i$

peut être décrit comme une somme de produits des différentielles par les *k* posalités individuelles

posalité$_k$

par les conductances correspondantes sur la *ième* universalité

conductance$_{ik}$

ce qui donne

transversalité

=

*somme $_{k=1..n-1}$ (comductance$_{ik}$ * **différentielle** * posalité$_k$)*

En introduisant les valeurs locales dans l'équation de bilan intégral on trouve

*∂/dt somme$_{volume}$ (densitale$_i$ * ∂volume)*

=

*somme$_{volume}$(densitale * ∂volume) + somme$_{frontière}$ **transversalité$_i$** * ∂frontière*

Cette équation de bilan le la *i$_{ème}$* universalité se réfère toujours à la région entière

volume

Le second terme de la partie droite de l'équation est une somme sur la frontière (surface) qui peut être convertie en une somme dans le volume selon le théorème d'Ostrogradsky qui stipule que

l'intégrale de frontière d'une transversalité sur une frontière fermée est égale à l'intégrale de volume de la différentielle de la même quantité dans le volume renfermé par la frontière

*somme$_{frontière}$ **transversalité$_i$** * ∂**frontière***

=

*somme$_{volume}$ **différentielle • transversalité$_i$** * ∂volume*

La signification scientifique de l'injection de la différentielle dans la transversalité

différentielle • transversalité

est facile à comprendre

Tout comme

- la quantité d'une universalité contenue dans un volume donné est égale à l'intégrale de volume de sa densalité

- le taux d'endoversalité (de bivergence d'une source ou d'un puits) vaut l'intégrale de volume de la densalité, la transversalité totale est égal à l'intégrale de volume d'une concentration volumétrique de transversalité

Cette concentration de transversalité n'est rien d'autre que

différentielle • transversalité$_i$

En interchangeant la différentiation et l'intégration par rapport au temps on trouve

somme$_{volume}$ (∂densalité$_i$/∂t + ***différentielle • transitale$_i$*** *- endoversitale$_i$) ∂volume*

=

0

Pour que l'intégrale soit nulle indépendament des limites d'intégration l'intégrand lui-même doit être nul

On arrive ainsi à l'équation générale de transit, transport, transfert

∂densalité$_i$/∂t + ***différentielle • transversalité***

=

endodensalité$_i$

La seule restriction sur *densalité$_i$* est qu'elle doit être

la densité d'une universalité

En remplaçant la densité de transit par la forme locale de l'équation de Onsager on obtient

∂densalité$_i$/dt + ***différentielle*** *• (somme $_{k=1..n-1}$ (conductance$_{ik}$ ** ***différentielle*** ** posalité$_k$))*

=

endodensalité$_i$

La relation d'Onsager donne les dits

flots conductifs

des universalités individuelles *i*

Si le centre d'universalité (centre de masse) du système est lui-même en mouvement c'est-à-dire s'il y a

une composante de mouvement macroscopique

ce mouvement déplace les universalités en plus de leur déplacements dus aux propriétés de la matière et il faut ajouter un flot convectif d'universalités

Les densitaless de

transit convectif

peuvent être représentées très simplement

En effet si en toute position de l'univers la concentration (densité) $densalité_i$ de la $i_{ème}$ universalité et la vitesse de déplacement en cette position par rapport au référentiel de base est ***vitesse*** alors la densité de transit convectif sera

$densalité_i$ * ***vistesse***

Et la densité de transit totale est la somme des densalités de transit convectif et conductif

transversalité$_i$

=

$densalité_i$ * ***vitesse*** + *somme* $_{k=1..n-1}$ *(*$conductance_{ik}$ * ***différentielle*** * $posalité_k$*)*

En remplaçant dans

∂$densitale_i$*/∂t* + ***différentielle •transversalité***

=

$endodensalité_i$

on obtient, en notant la concentration (densité) d'universalité ©

∂$©_i$*/∂t* + ***différentielle*** **•** *(*$©_i$ * ***v*** + *somme* $_{k=1..n-1}$ *(*$conductance_{ik}$ * ***différentielle*** * $positale_k$*))*

=

$endodensalité_i$

Le modèle de tout phénomène particulier peut être dérivé de l'équation générale ci-dessus

Pour trouver ce modèle le scientifique doit d'abord clarifier

- les universalités et les posalités pertinentes du système considéré

- les expressions concrêtes des concentrations d'universales

Modèles mathématiques

L'analyse scientifique d'un phénomène quelconque nécessite de comprendre son comportement en fonction (au regard) des relations entre

- les entrées

- les sorties

et

- les changements d'états correspondants

La compréhension du phénomène

en termes de système

est une représentaion logique des

lois de la nature

Selon ces lois le comportement du système dépend de

- sa géométrie (son universaltié)

- son état précédent le comportement analysé

- son isolation

et de

- la manière dont l'environnement interfère de l'extérieur (la manière dont les conditions aux frontières sont changées)

Une caractérisation quantitative du système nécessite en outre une équation représentant les lois en jeu, généralement *un système d'équations différentielles*

Une système de telles équations peut être dérivé par une connaissance

- des versalités et des posalités pertinentes d'un système

- des densalités

et

- des conductances

$$\partial densalité_i / \partial t$$

$$=$$

$$endoversalité_i - somme_{k=1..n-1} (conductance * (posalité_k - posalité_{k0}))$$

et

$$\partial densalité_i/\partial t$$

$$+ \textbf{différentielle} \bullet (densalité_i * \boldsymbol{v} + somme_{k=1..n-1} (conductance_{ik} * \textbf{différentielle} * posalité_k))$$

$$=$$

$$endodensalité_i$$

après certaines simplifications nécessaires pour les cas particuliers le volume, la région, le domaine de définition de l'équation limite les valeurs que les variables des équations, y inclu les versalités (géométriques) peuvent prendre

Ce volume, ce domaine, cette région fixe

l'intervalle universel

dans lequel l'usage de l'équation différentielle est valide

En ce qui concerne les variables universales (géométriques) ceci est équivalent à définir les frontières du système examiné c'est-à-dire à fixer la forme du système qui fixe son interface avec l'environnement

- les conditions aux limites, utilisées pour caractériser l'interaction entre le système et son environnement qui incluent les relations décrivant par exemple *l'influence externe d'un manipulateur du système*

- les conditions initiales qui décrivent l'état du système à l'instant choisi pour démarrer l'investigation

A noter que les systèmes invariants n'ont pas de conditions initiales

- les équations caractéristiques qui représentent les propriétés intrinsèques du milieu constituant le système par des transitances

Le domaine de définitions et les équations caractéristiques doivent être formulées séparément pour tout système, raison pour laquelle elles sont appelées

conditions d'unicité

Mathématiquement parlant ce sont les conditions pour que le système d'équations différentielles décrivant le système ait une solution unique

Scientifiquement ce sont les conditions pour que le système étudié soient adéquates et univoques pour l'objectif de compréhension recherché

L'équation de description plus les conditions d'unicité constituent ainsi le modèle du système

Un problème scientifique peut être considéré comme résolu si la solution de son système d'équations de bilan différentiel est connu sous des conditions d'unicité

La solution est une description du comportement du système, de la relation entre son état, les entrées et les sorties

Conduction et diffusion (175)

Conduction de la chaleur (175)

L'expression

conduction de la chaleur

dénote

un phénomène de transport (transit) d'énergie généré par

une inhomogénéité de température

Dans la conduction pure de la chaleur les distributions de toutes les posalités hormis

la température

sont homogènes ou d'inhomogènéité négligeable

Le système peut être

- immergé dans un milieu au repos par rapport à lui

c'est-à-dire que la vitesse relative du système est nulle par rapport à son environnement

et

- il n'y a pas de d'endoversalité présente dans le système

L'équation de transit (transport) écrite pour

- la concentration (densité) d'énergie

et

- une convection nulle est

∂densalité / ∂t + ***différentielle*** *• conductance ** ***différentielle*** *** température*

=

0

où

densalité

est la densité d'énergie et

conductance

est le négatif du coefficient de conduction thermique c'est-à-dire encore le coefficient de conduction énergétique de la matière composant le système

La différentielle de la densité d'énergie par rapport au temps vaut

∂densalité / ∂t

=

*∂densalité / ∂**température** • ∂**température** / ∂t*

+

∂densalité / ∂densalité • ∂densalité / ∂t

=

*chaleurSpécifique * densalité * ∂température / ∂t*

+

*potentielChimique * ∂densalité / ∂t*

avec

chaleurSpécifique

=

1 / densalité • ∂densalité / ∂température

Le coefficient de conduction de la chaleur peut être considéré comme

indépendant de la position

et la densalité peut être considérée comme

indépendante du temps

L'équation de transit (transfert, transport) de la chaleur (de l'énergie) peut alors être simplifiée en divisant l'équation par

*chaleurSpécfique * densalité*

ce qui donne l'équation de Fourier

∂température / ∂t

*- conductance / chaleurSpécifique * densitale * **différentielle** • **différentielle** * température*

=

0

ou de manière plus compacte et classique

∂température / ∂t

=

alpha * ***différentielle • différentielle*** * *température*

ou

alpha

=

*coefficientConduction / chaleurSpécifique * densalité*

est

le coefficient de conduction de la température

La bidifférentielle vaut

bidifférentielle

=

différentielle • différentielle

=

$\partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2 + \partial^2 / \partial y^2$

L'équation

∂température / ∂t

=

alpha * ***bidifférentielle*** * *température*

est l'équation fondamentale de transmission de la chaleur

Elle est équivalente à l'équation générale de transit de l'énergie

∂densalité$_i$/∂t	+	***différentielle* •** [*densalité****v*** + ∑ *C$_{ij}$* * ***différentielle*** * *posalité$_j$*]	+	*endoversalité*

Si (conditions)

- toutes les posalités exceptée la température ont une distribution homogène c'est-à-dire que

différentielle * *posalité$_i$*

=

0

pour

posalité$_i$ ≠ température

- la vitesse du milieu dans lequel est plongé le système est nulle

v

=

0

- il n'y a pas de source endogène d'énergie

endoversalité$_{énergie}$

=

0

- le coefficient de conduction de la chaleur est indépendant de la position

- la densité de masse est constante dans le temps

Ces conditions prises ensemble définissent le domaine de validité de l'équation de Fourier

$$\partial \textit{densalité}_i/\partial t \;+\; \boldsymbol{\textit{différentielle}} \bullet \left[\, \textit{densalité}_i * \boldsymbol{v} \;+\; \sum C_{ij} * \boldsymbol{\textit{différentielle}} * \textit{posalité}_j \,\right] \;+\; \textit{endoversalité}$$

Si on met les abréviations

- © pour la densalité, la concentration de chaleur

et

- π pour la posalité, la température

on obtient

$$\partial ©_i/\partial t \;+\; \boldsymbol{\textit{différentielle}} \bullet \left[\, ©_i * \boldsymbol{v} \;+\; \sum C_{ij} * \boldsymbol{\textit{différentielle}} * \pi_i \,\right] \;+\; \partial ©/dt$$

Comme la vitesse du milieu est nulle et on n'a pas d'endoversalité

$$\partial ©_i/\partial t \;+\; \boldsymbol{\textit{différentielle}} \bullet \left[\, 0 \;+\; \sum T_{ij} * \boldsymbol{\textit{différentielle}} * \pi_i \,\right] \;+\; 0$$

La densitale c'est-à-dire

la concentration d'énergie (la densité d'énergie)

est équivalente à

- la chaleur spécifique

fois

- la densité de la matière

fois

- la température

ce qui donne

$$\partial\, c*d*T/\partial t + \mathit{bivergence} * \left[\copyright_i * \boldsymbol{v} + \sum L_{ij} * \boldsymbol{\mathit{différentielle}} * \pi_i \right] + \partial \copyright$$

Comme la vitesse est nulle et qu'il n'y a pas d'endoversalité

$$\partial\, c*d*T/\partial t + \boldsymbol{\mathit{différentielle}} \bullet \left[0 + \mathit{conductivité} * \boldsymbol{\mathit{différentielle}} * T \right] = 0$$

Il y a une seule conductivité d'une seule positale, la température

Comme la chaleur spécifique et la densité sont homogènes dans le système on a

$$\partial(c*d) / \partial t = 0$$

et on peut sortir le produit de la différentielle temporelle

<table><tr><td>c*d*∂T /∂t</td><td>+</td><td>différentielle •
<table><tr><td>0</td><td>+</td><td>conductivité * différentielle * T</td></tr></table></td><td>=</td><td>0</td></tr></table>

Comme

***différentielle* •** *conductance = 0*

on peut sortir la conductance avec son signe

<table><tr><td>c*d*∂T/∂t</td><td>+</td><td>- conductance * différentielle •
<table><tr><td>0</td><td>+</td><td>différentielle * T</td></tr></table></td><td>=</td><td>0</td></tr></table>

On peut aussi diviser la conductance par *c*d*

<table><tr><td>T/∂t</td><td>+</td><td>- alpha * différentielle •
<table><tr><td>0</td><td>+</td><td>différentielle * T</td></tr></table></td><td>=</td><td>0</td></tr></table>

T/∂t	+	***-** alpha* * *(**0** + **bidifférentielle** * T)*	=	*0*

Le coefficient *alpha* est le coefficient de conduction de la température

alpha

=

*conductance/ (chaleurSpécifique * densité)*

Diffusion de matière

Le terme diffusion signifie le transport conductif de composés chimiques tendant à rendre uniforme la distribution de concentration, de densité, dans une phase

On distingue les cas de diffusion moléculaire et de diffusion molaire (ou turbulent

La diffusion moléculaire intervient quand un système inclu des composants de potentiel chimique différents

Le système considéré est supposé homogène dans toutes les positales sauf la positale chimique, c'est à dire qu'il n'y a pas d'effets croisés (thermodiffusion, électrodiffusion)

Il n'y a pas de source de masse, pas de réaction chimique

La potentiel chimique est la positale pertinente du transit de masse

La direction de diffusion est controlée par une tendance à rendre le potentiel chimique uniforme

Le transport de densitale, de la densité de masse, vaut

transversalité

=

$C_{d\mu}$ * ***différentielle*** * μ

où $C_{d\mu}$ est le coefficient de conduction de diffusion par rapport au potentiel chimique μ

Le potentiel chimique est une fonction de la température et de la concentration

μ

=

μ(température, concentration)

=

$\mu(T, d)$

Donc

différentielle * μ

=

$\partial\mu/\partial T_{dconstante}$ * ***différentielle*** * T + $\partial\mu/\partial d_{Tconstante}$ * ***différentielle*** * d

différentielle * $T = 0$

Donc la densité de transit de masse vaut

transversalité

=

$L_{©\mu}$ * ***différentielle*** * μ

=

$L_{©\mu}$ * $\partial\mu/\partial$© * ***différentielle*** * ©

=

-D * ***différentielle*** * ©

avec

D

$=$

$-L_{©\mu} * \partial\mu/\partial©$

$$\partial \mathit{cotransitale}_i/\partial t + \mathit{bivergence} * \left[\mathit{cotransitale}_i * \boldsymbol{v} + \sum L_{ij} * \boldsymbol{\mathit{différentielle}} * \mathit{positale}_j \right] + \mathit{bivergitale}$$

$$\partial©/\partial t + \mathit{bivergence} * \left[© * \boldsymbol{v} + \sum L_{ij} * \boldsymbol{\mathit{différentielle}} * \mathit{positale}_j \right] = 0$$

$\boldsymbol{\mathit{différentielle}} * \mathit{positale}_j = 0$

$\mathit{positale}_i = \mu(©, T)$

$\boldsymbol{\mathit{différentielle}} * \mu = \partial\mu / \partial© * \boldsymbol{\mathit{différentielle}} * ©$

$$\partial©/\partial t + \mathit{bivergence} * \left[© * \boldsymbol{v} + \left(- L_{©\mu} * \partial\mu/\partial© \right) \right] = 0$$

∂©ᵢ/∂t	+	*0* + *- D * **bidifférentielle** * ©*	+	*0*

La relation

transversalité

=

*- D * **différentielle** * densalité*

est connue sous le nom de première loi de Fick

En introduisant cette relation dans la relation

*∂©/∂t + divergence * ($L_{©\mu}$ * **différentielle** * ©)*

=

0

on obtient

∂©/∂t

=

*divergence * (D * **différentielle** * ©)*

est connue sous le nom de seconde loi de Fick

Une forme plus familière de cette loi est obtenue en assumant *D* approximativement constant ce qui donne

∂©/∂t

=

*D * bidifférentielle * ©*

qui est la loi fondamentale de la diffusion équivalente à l'équation de transport de masse sous les conditions suivantes

- toutes les positales excepté le potentiel chimique sont de distribution homogène

- la vitesse du flot est nulle

- il n'y a pas de source de masse, de réaction chimique

- le coefficient de diffusion est indépendant de la position

Transport de masse

On a étudié plus haut le transport par diffusion de masse pure

On va étudier maintenant le transport par convection pure

Ensuite on étudiera le transport de masse composite conduction-convection ainsi que leur effet croisé

L'équation de continuité le la densité de masse exprime la conservation de la masse dans des fluides mouvants

Elle peut être dérivée directement de l'équation générale de transport non-rotationnel en remplaçant la densité par la densité par la densité de masse et la vitesse du flot par la densité de flot de masse convectif

*∂©/∂t + bivergence * © * **vitesse***

=

0

Cette équation est connue sous le nom d'équation de continuité de Reynolds

En développant le second terme on a

*∂©/∂t + © * bivergence * **vitesse + vitesse** * **différentielle** * ©*

=

0

Dans un fluide incompressible

∂©/∂t = 0

et donc

*∂ø/∂t + **vitesse * différentielle** * ø*

=

0

Ceci implique que le flot soit libre de toute divergence

*divergence * **vitesse***

=

0

Transport de masse dans un fluide mouvant (189)

Les deux sections ci-dessus permettent d'écrire l'équation de transport de masse directement en représentant à la fois la conduction et la convection

*∂©/∂t + **différentielle** • (© * **vitesse** - D * **différentielle** * ©)*

=

0

Thermodiffusion (196)

La théorie du transport (transfert, transit) considère que le flot d'une transitale peut être généré par l'inhomogénéité d'une positale quelconque, pas nécessairement par la positale correspondante

Comme conséquence d'effets croisés, un flot de chaleur peut être provoqué par une différence de concentration et réciproquement une inhomogénéité de température peut générer un flot de masse

Un grand nombre d'effets croisés est connu y compris le flot de masse du à une différence de voltage électrostatique, un flot de charges électriques du à une différence de température, etc.

On peut analyser la thermodiffusion en détail pour comprendre

En considérant le flot de masse causé par une inhomogénéité de température déjà analysé un cas plus général est celui de la thermodiffusion

En prenant en compte la température on a

$$L_{ø\mu} * gradient * ø$$

$$L_{øT} * gradient * T$$

et donc

$$∂ø/∂t + divergence * (L_{ø\mu} * gradient * ø + L_{øT} * gradient * T)$$

$$=$$

$$0$$

En se souvenant que

$$\mu = \mu(T, ø)$$

mais en ne négligeant plus les inhomogénéités de température

$$gradient * \mu$$

$$=$$

$$∂\mu/∂ø_{Tconstante} * gradient * ø + ∂\mu/∂T_{øconstante} * gradient * T$$

et l'équation de transport de masse prend la forme

$$∂©/∂t$$

$$=$$

$$\textbf{différentielle} \bullet (D * \textbf{différentielle} * © + D' * \textbf{différentielle} * T)$$

ou

$$D = -D_{ø\mu} * ∂\mu/∂d_{Tconstante}$$

est le coefficient de diffusion et

$D' = -(L_{ø\mu} * \partial\mu/\partial T_{øconstante} + L_{øT})$

est le coefficient de thermodiffusion

A noter que les coefficients de thermodiffusion de la thermodynamique irréversible constituent une matrice symmétrique

$L_{ij} = L_{ji}$

Cette remarque n'est pas valable pour les coefficients de conduction utilisés ici

Les deux types de coefficients de conduction sont évidemment reliés

Ainsi par exemple dans l'équation de transport de masse le coefficient de conduction appartenant à

*gradient * d*

est

$L_{nm} = -ø * T * L_{d\mu}$

Des relations similaires existent entre les autres coefficients de conduction

L'équation

$\partial ø/\partial t$

=

$divergence(D * gradient * ø + D' * gradient * T)$

se simplifie en

$\partial ø/\partial t$

=

$D * laplacien * ø + D' * laplacien * T$

Cette équation seule n'est cependant pas suffisante pour caractériser le phénomène

Il faut la compléter par une équation d'énergie

Il faut se souvenir que le transport d'énergie interne n'est pas provoqué par une inhomogénéité de la posité correspondante seule (notablement la température) mais aussi par un gradient non nul de potentiel chimique

Le changement est que le terme

L_{ET} * *gradient* * T

est complèté par le terme

$L_{E\mu}$ * *gradient* * μ

et donc

$$\partial E/\partial t + divergence(L_{ET} * gradient * T + L_{E\mu} * gradient * \mu)$$

$$=$$

$$0$$

La transformation de *gradient* * μ et la substitution

$$E = c * ø * T$$

donne la forme adéquate de l'équation d'énergie

$$\partial T/\partial T + T/d \,.\, \partial ø/\partial t$$

$$=$$

$$1/\, c * ø * divergence(lambda * gradient * T + lambda' * gradient * ø)$$

ou

$$lambda = -(L_{ET} + L_{E\mu} * \partial \mu/\partial ø_{dconstante})$$

est le coefficient de conduction et

$$lambda' = -L_{E\mu} * \partial \mu/\partial ø_{Tconstante}$$

est le coefficient de conduction chaleur de l'effet Dufour

Si *lambda* et *lambda'* sont constants ils peuvent être placé de l'opérateur de divergence

$$\partial T/\partial t + T/ø \,.\, \partial ø/\partial t$$

$$=$$

alpha * laplacien * T + alpha' * lapalacien * ø

avec

alpha = lambda / c * ø

et

alpha' = lambda' / c * ø

sont les coefficients de conduction de température

En introduisant les dérivées par rapport au temps de

∂ø/∂t

=

D * laplacien * ø + D' * laplacien * T

on obtient

∂T/dt

=

alpha * laplacien * T + alpha' * laplacient ø - T/ø * (D * laplacien * ø + D' * laplacien * T)

et en réarrangeant

∂T/dt

=

(alpha - T/ø * D') * laplacien * T + (alpha' - T/ø * D) * laplacien * ø

Cette équation considérée avec l'équation

∂d/∂t

=

D * laplacien * ø + D' * laplacien * T

constituent le système d'équations décrivant la thermodiffusion

Dynamique des fluides

Dans les chapitres précédents on a étudié la similitude entre phénomènes concernant le transit de versalités numériques (énergie interne et masse)

On a cependant remarqué que quelque soit la versalité si un courant est présent alors le modèle implique des termes de transport d'élan

On a donc constaté dans notre analyse du mélange et de la conduction de chaleur dans un fluide mouvant des phénomènes qui ne peuvent pas être séparés

C'est pourquoi on a supposé une similitude des conditions de transit sans préciser pourquoi

On va donc étudier ici la similitude des conditions de transit

La compréhension des conditions de transit dans un fluide est une tâche importante dans pratiquement toute démarche scientifique

On va donc étudier les équations de transport d'élan

Les équations fondamentales

Les équations fondamentales peuvent être une fois de plus dérivées de l'équation générale de bilan tout en se rappelant que l'élan est une flèche

$\partial©_i/\partial t$	+	***différentielle •*** [$©_i$ * ***vitesse*** + $\sum D_{ij}$ * ***différentielle*** * *posalité*$_j$]	+	*endo*$©_i$

Le bilan d'élan

L'élan d'un fluide de masse *masse* transitant à une vitesse ***vitesse*** vaut

masse * ***vitesse***

Nommons *i* une composante de la vitesse notée

vitesse$_i$

Pour simplifier la discussion on peut séparer cette composante c'est-à-dire que la densité de la transitale soit

© * ***vitesse****ᵢ*

Le premier terme de l'équation de bilan est la différentielle partielle par rapport au temps de cette expression

*∂©** ***vitesse****ᵢ/∂t*

Le transit convectif d'élan est obtenu par le produit du gradient de la positale relative et le coefficient correspondant

Une des positale pertinente attachée à l'élan est la vitesse du flot et son gradient est le tenseur différentiel de la vitesse

En considérant la ième composante son expression est

différentielle * ***vitesse***

Le coefficient de conduction du fluide est le paramètre qui indique l'intensité du flot d'élan résultant d'une différence de vitesse

Par définition il vaut le coefficient de viscosité dynamique (newtonienne) avec un signe négatif

Le premier terme de la densité de flot convectif est donc

*-viscosité * gradient * vitesse*

Une autre partie de la densité de flot convectif est connecté à la divergence de la vitesse et la différence de pression statique

Il est donc suffisant que le flot d'élan convectif ait la nature d'un stress

Le second terme de la densité de flot convectif est donc

*-(viscosité******différentielle • vitesse***-pression) * identité*$_{ij}$

ou *neta'* est le dit second coefficient de viscosité, *pression* est la pression statique et *identité*$_{ij}$ est la matrice unité pour $i = j$

Outre le second coefficient de viscosité on utilise aussi la dite viscosité dynamique ou viscosité dilatationnelle c'est à dire le rapport *viscositéDynamique*

=

viscosité/densité

Une force est égale au changement d'élan par unité de temps

Si un fluide de masse *masse* coule dans un champ provoquant l'accélération

gravité

alors

*masse****gravité***

est la force agissant sur lui et tendant à accroitre son élan

Ainsi la densité de source d'élan est

ø*gravité

On peut introduire ces expressions dans

$\partial ø_i/\partial t$	+	*divergence* ($ø_i$ * **vitesse** + $\sum L_{ij}$ * *gradient* * $posity_j$)	+	$source_i$

ce qui donne

$\partial ø*\mathbf{v}_i/\partial t$	+	*divergence* ($ø*\mathbf{v_i}*\mathbf{w}$ - $neta*grad*\mathbf{w}$ - $(neta'*div*\mathbf{v}-p)*\mathbf{I}$)	=	$ø*\mathbf{g_i}$

La densité de flot dans la divergence est une flèche

Dans une équation impliquant les trois composantes cette densité de flot est un tenseur

L'opérateur de divergence tensorielle peut être noté par *Divergence*

De la même manière l'opérateur *grad* appliqué à un champ numérique peut être remplacé par l'opérateur *Gradient* qui fournit le dit tenseur dérivé de la flèche

L'équation versologique implique un tenseur unité ***I***

La forme versologique devient donc

<table>
<tr>
<td rowspan="2">∂ø*v/∂t</td>
<td rowspan="2">+</td>
<td colspan="3">Divergence</td>
<td rowspan="2">=</td>
<td rowspan="2">ø*g</td>
</tr>
<tr>
<td>ø*v ◊ v</td>
<td>-</td>
<td>neta*Grad*v - (neta'*div*v-p)*I</td>
</tr>
</table>

C'est la forme la plus générale du bilan différentiel d'élan

La densité du flot d'élan peut être atteinte par une approche alternative

La densité de flot convectif d'une transitale numérique est le produit de la transitale elle-même par la vitesse du flot qui est une flèche

La densité d'élan est une flèche

La densité de son flot convectif est un produit tensoriel (dyadic) avec la vitesse du flot

ø****vitesse*** ◊ ***vitesse***

=

ø*v_1^2	ø*v_1*v_2	ø*v_1*v_3
ø*v_1*v_2	ø*v_2^2	ø*v_2*v_3
ø*v_1*v_3	ø*v_2*v_3	ø*v_3^2

La densité de flot d'élan convectif est donc un tenseur et en outre dans le cas d'un flot de fluide un tenseur symétrique

La valeur instantannée de la flèche vitesse peut être décomposée entre la valeur la plus probable ***v*** (la flèche moyenne) et la déviation de cette moyenne

Il existe une analogie totale entre le phénomène de transport de masse si on considère que le transport de masse conductif (diffusion) résulte de la pulsion (mouvement thermique, mouvement brownien) des atomes ou molécules avec les particules en suspension dans le fluide

Selon la théorie phenomènologique la diffusion moléculaire varie comme le gradient de sa positale pertinente, le potentiel chimique

Le transport (transfert, transit) d'élan peut être conçu de manière similaire

Le transport conductif d'élan est une conséquence d'inhomogénéités dans la distribution de cette flèche

Le degré d'inhomogénéité est obtenu en le multipliant par l'opérateur *nabla*

Si la quantité est multipliée par un nombre, son produit avec *nabla* est un gradient

Pour une flèche l'opérateur *nabla* peut être appliqué de différentes manières

- un produit scalaire donne *la divergence*

- un produit vectoriel donne *le rotationnel*

et

- un produit tensoriel donne le tenseur *Gradient*

En tenant compte de la pression statique dans l'univers du flot, le transport conductif d'élan prend une forme où dans laquelle on a *neta* et *neta'* comme les coefficients de conduction appropriés, un Gradient qui est le tenseur gradient de vitesse une pression qui est le tenseur de stress

Le transport d'élan est généré par un champ de force extérieur qui est ***ø*g*** dans le cas simple

L'équation de transport devient

<table>
<tr><td rowspan="2">∂ø*v/∂t</td><td rowspan="2">+</td><td colspan="3">Divergence</td><td rowspan="2">=</td><td rowspan="2">ø*g</td></tr>
<tr><td>ø*v ◊ v</td><td>+</td><td>P</td></tr>
</table>

qui est identique à

$\partial ø*\boldsymbol{v}/\partial t$	+	*Divergence*				=	$\boldsymbol{ø*g}$
		$\boldsymbol{ø*v} \lozenge \boldsymbol{v}$	-	$neta*Grad*\boldsymbol{v}$ - $(neta'*div*\boldsymbol{v}-p)*\boldsymbol{I}$			

Si on considère un flot laminaire d'un fluide incompressible c'est-à-dire que la différentielle totale de sa densité de masse par rapport au temps est nulle c'est-à-dire

$$\partial ø/\partial t$$

$$=$$

$$\partial ø/\partial t + \boldsymbol{vitesse}*gradient*ø$$

$$=$$

$$0$$

Si le bilan de masse ne contient aucune source et que le flot de masse conductif peut être négligé comparé au flot de masse convectif alors

$$\partial ø/\partial t + divergence*\boldsymbol{ø*vitesse}$$

$$=$$

$$0$$

Cette équation implique que

$$\sum_{i=1..3} \partial \boldsymbol{vitesse_i}/\partial \boldsymbol{direction_i}$$

$$=$$

$$\sum_{i=1..3} \partial \boldsymbol{v_i}/\partial \boldsymbol{x_i}$$

$$=$$

*divergence****v***

=

0

car

*∂ø/∂t + divergence*ø****vitesse***

=

∂ø/∂t + ***vitesse*****gradient*ø + ø*divergence****vitesse***

et dans un fluide incompressible les deux premiers termes à droite sont nuls

La partie gauche est nulle en raison de la continuité et la densité est non nulle

On a donc

*divergence****vitesse***

=

0

L'équation, en divisant le tout par ø par simplicité, devient l'équation de Navier-Stokes

$$\partial v_i/\partial t + \sum_{j=1..3} (v_j * \partial v_i/\partial x_j - neta * \partial^2 v_i/\partial x_j^2) + 1/ø * \partial p/\partial x_i$$

=

$$g_i$$

où

- v_i et v_j sont les composantes de la vitesse dans les directions i et j

- g_i est l'accélération due à la gravité assumée agissante dans la direction x_i seulement

et

- *neta* est la viscosité dynamique

Dans un fluide non visqueux le troisième terme est nul puisque *neta = 0* et l'équation se simplifie en l'équation de Euler

En résumé, l'équation fondamentale de la dynamique des fluides peut être dérivée de l'équation générale de bilan sous les conditions suivantes

- le tranport (transfert, transition, transit) conductif est négligeable

- le bilan de masse ne contient pas de source

- le fluide est incompressible

ce qui donne

		divergence				
$\partial ø_i/\partial t$	+	$ø_i$ * **vitesse**	+	$\sum L_{ij}$ * *gradient* * $posity_j$	+	$source_i$

$\partial ø*v_i/\partial t$	+	$\sum_{i=1..3}$	+	$source_i$

La convection libre (230)

Jusqu'à présent on a analysé le flot de fluides homogènes en densité

Dans de tels fluides aucun flot ne se produit sans une influence externe et donc les vitesses sont uniquement dues aux frontières sans tenir compte de ce qui se passe à l'intérieur du fluide

Ce genre de phénomène est en général qualifié de flot forcé

Un flot de fluide peut cependant naître en absence de toute influence externe comme résultant d'une différence de densité

Dans un tel phénomène connu sous le nom de convection libre les condition d'unicité spédifient aucune vitesse caractéristique ou alternativement la vitesse du flot est nulle le sur toute la frontière

Ainsi aucun critère de similitude impliquant une vitesse de référence n'existe

En convection libre ni le nombre de Reynolds ni le nombre de Froude ne peuvent être un critère de similitude

La convection libre nait par exemple du chauffage ou du refroidissement d'une partie du fluide dans un univers clos

Dans la convection libre les variations de densité ne dépendent que de la température

$$ø = ø_0(1 - beta\ dT)$$

où dT est une déviation de la température moyenne

$$dT = T - T_0$$

- $ø_0$ est la densité correspondant à la température moyenne T_0

- $beta$ est le coefficient d'expansion volumétrique thermique

$$beta = -1/ø_0 * (\partial ø/\partial T)_{p=cte}$$

En prenant l'équation

$$\partial v_i/\partial t + \sum_{j=1..3} (v_j*\partial v_i/\partial x_j - neta *\partial^2 v_i/\partial x_j^2) + 1/ø*\partial p/\partial x_i = g_i =$$

0

Si on une densité de source dans la direction x_3 les composantes dans les directions x_1 et x_2 sont inchangées

$$\partial v_i/\partial t + \sum_{j=1..3} (v_j*\partial v_i/\partial x_j - neta *\partial^2 v_i/\partial x_j^2) + 1/ø*\partial p/\partial x_i$$

=

g_i

=

0

Pour $i = 1$ et 2 et

$$\partial v_3/\partial t + \sum_{j=1..3} (v_j*\partial v_3/\partial x_j - neta *\partial^2 v_3/\partial x_j^2) + 1/ø*\partial p/\partial x_3$$

=

$g * (1 - beta * dT)$

pour la troisième direction

Transport d'élan en flot turbulent

Particules solides dans des fluide coulants

Déformation élastique

Les structures sont exposées à des stress

Le scientifique doit choisir les matériaux et la géométrie des structures de telle sorte que le stress n'engendre pas de déformation permanente des éléments

Le présent chapitre concerne la similitude de modélisation des déformations sous stress

L'équation fondamentale

La force est le changement d'élan par unité de temps

La transitale pertinente est donc l'élan qui est transmis ainsi que l'énergie

L'équation de transport d'élan peut être présentée selon l'équation générale de transport

L'équation de transport d'élan pour les solides

L'élan est une quantité transitale versologique

Sa densité est égale au produit de la densité de masse et de la vitesse du flot

Dans la dérivation d'une équation de bilan on va considérer un corps dont le centre de gravité est au repos c'est-à-dire dont la vitesse de flot est nulle

Ceci signifie seulement que la densité de flot convectif est nulle dans l'équation de transport mais aussi qu'une approche différente doit être prise pour la détermination de la densité d'élan

La flèche de déformation

Dans les fluides au repos les stress se propagent dans toutes les directions de manière homogène

Le changement de direction du corps est uniquement déterminé par le changement de volume

dV

Le travail peut être conçu comme le produit d'un stress isotrope avec le changement de volume

travail

=

$-p * dV$

Dans un corps élastique le changement de volume dV ne détermine plus de manière unique le changement de taille et il est donc nécessaire de fixer les composantes du changement selon les axes individuels

Si le solide est exposé à des stress externes alors les flèches se déforment

A la fois leur taille et leur direction vont changer selon une fonction de la taille et de la direction de la déformation

Le changement de dimensions (la déformation) peut être caractérisée en termes de flèche de déformation

La flèhe de déformation est la positale pertinente du transport d'élan dans les solides

La densité de flot conductif d'élan c'est-à-dire le tenseur de stress est défini par les propriétés générales de symmétrie du corps et par des considérations de transport

Tenseur

=

L1 * ***B*** + ***B'*** * ***B'*I***

où ***I*** est le tenseur unité et *L1* et *L2* sont des coefficients de conduction dépendant de la qualité du matériau

B est la composante symmétrique du tenseur gradient de la flèche de déformation ***déformation*** et ***B'*** est la divergence de cette flèche

Le tenseur gradient de la flèche de déformation est

nabla ◊ ***déformation***

On peut noter sa composante symmétrique

S

La divergence de la flèche de déformation vaut

*nabla**déformation***

L'équation de bilan

L'équation fondamentale peut de nouveau être déduite de l'équation de bilan générale

Réactions chimiques

On a montré comment la détermination des densités de source à droite de l'équation de transport (transfert, transit) nécessite une considération séparée et comment leur forme dépend de l'objectif de modélisation car à la fois les variables représentant la densité de source et les équations les liant présentent une grande variété

Les réactions chimiques peuvent être considérées comme les prototypes des phénomènes de transport impliquant des sources

L'équation fondamentale

Le phénomène de reaction chimique est représenté par

- les équations d'énergie et de transport d'impulsion (élan)

- les équations de transport de masse écrites pour chacun des éléments

- les conditions d'unicité

Ces dernières fixent les valeurs des paramètres aux frontières de l'espace de réaction à tout instant (conditions aux frontières)

L'état du système à un instant initial (seulement si le système n'est pas en équilibre)

Les plages des variables

Les équations d'état des entrées et des sorties (réactants et produits) de la réaction et leurs paramètres matériels

Equation de bilan

Dans une réaction chimique il est pertinent de considérer la conservation de masse sous une forme un peu différente et de poser que la réaction cause la diminution de certains composants et l'augmentation d'autres composants

Ces changements sont considérés comme des sources (puits) de masse dans les équations de masse des composants individuels

La différence avec les autres modèles provient du fait que

- l'équation de transport de masse est écrite séparément pour chaque composant indépendant

- le terme de source des bilans de masse composite sont non nuls ce qui revient à dire que les réactions chimiques ont lieu à des taux non nuls

En additionnant les sources de tous les composants leur somme doit être nulle qui est un corrolaire de la conservation de la masse totale dans un système fermé

Modéliser et simuler (P)

Equations différentielles temporelles, modèle concentré

Modèle général

différentielle * ***entitales*** */ temps*

=

*transformation(**entitales**, **entrées, paramètres**, temps)*

et en utilisant la notation abbrégée

∂

pour

différentielle

on obtient

*∂**entitales**/∂t*

=

*transformation(**entitales**, **entrées, paramètres**, temps)*

et

sortie

=

*observation(**entitales, entrées, paramètres**, temps)*

avec

entitales*(tenps*$_0$*)*

=

entitales

et

*contrainte(**entitales, entrées, paramètres,** temps)*

≥

0

Les fonctions *transformation, observation,* et *contrainte* peuvent être

- non-linéaires

et

- non-stationnaires

Modèle linéaire

Modèle invariant, linéaire, continu, concentré

*∂**entitales**/∂t*

=

*transformation(**entitales**, **entrées**)*

et

sorties

=

*observation(**entitales, entrées**)*

Equations aux dérivées universo-temporelles, modèle distribué

Propriétés variant dans l'univers et le temps

Modèle général

modèle

=

*transformation(**entrées**, **entitales**, **sorties,** ∂comportement, **frontière**, **capteurs**)*

En plus de la variable indépendante

temps

la variable indépendante

univers

est prise en compte

Le vecteur ***entitales*** est

le vecteur des variables dépendante

qui peuvent varier dans l'univers et le temps

On a donc le modèle

*∂transformation(**entitales**, ∂**entitales**/∂temps, ∂**entitales**/∂univers$_i$, **entrées**, **domaine**, temps)*

=

0

entitales

est la liste des variables dépendantes qui peuvent varier dans l'univers et le temps

*frontière(**entitale**, ∂**domaine**, temps)*

=

0

et

*observation(**entitales**, **domaine**, temps)*

=

sortie

Les équations sont valables dans le domaine ***domaine*** de l'univers

Des conditions sont fixées sur la frontière du domaine

Autrement dit

*transformation$_0$(**entitales**, **paramètres**, **univers**, temps) * ∂**entitales**)/∂t*

+

*somme$_{i-1 .. k}$ (transformation$_i$(**entitales, paramètres, univers,** temps)) * ∂**entitales**/∂univers$_i$*

=

*transformation(**entitales, paramètres, entrées, univers,** temps)*

et

*frontière(**entitales, paramètres, univers,** temps)*

=

0

pour

univers appartenant à la frontière ***∂univers*** de l'univers ***univers***

et

***entitales(univers,** temps$_0$)*

=

entitales$_0$(univers)

et

***sorties(entitales,** temps)*

=

*observation(**entitales, paramètres, univers,** temps)*

et

*frontière(**entitales, entrées, paramètres, univers,** temps)*

≥

0

Modélisation (212)

Les variables indépendantes d'une équation aux dérivées partielles contiennent

- toujours des variables universelles

et

- parfois le temps

Les variables universelles permettent d'identifier

la position de tout point du champ

par rapport à

un point de référence

en général l'origine des axes

Le temps apparait comme variable indépendante uniquement pour des systèmes en état transitoire

De nombreux problèmes consistent uniquement en des systèmes statiques ou stables auquel cas les variables universelles sont les seules variables indépendantes

Cependant quand le temps apparait dans le modèle, un instant spécifique est arbitrairement fixé comme

$temps_0$

=

0

et une solution est cherchée uniquement pour les temps

temps

≥

0

Les variables dépendantes du modèle sont des quantités qui sont mesurées par des instruments

Ces variables tombent dans deux catégories principales

- les variables positales (potentielles, across variables, posalités)

et

- les variables transitale (de flot, through variables, transversalités)

Une variable positale relie les conditions en

- une position de l'univers

aux conditions en

- une autre position de l'univers

ou

- une position de référence arbitraire

L'instrument de mesure d'une variable positales doit être appliqué simultanément en

deux positions différentes

et la taille spécifiée cet instrument représente généralement

une différence de quelque-chose entre les deux positions

Ainsi la température qui est toujours référée au

zéro absolu

ou au

point de congélation de l'eau

est la variable positale, la posalité, dans les systèmes de transfert de chaleur

Sont des variables positales

- la pression

dans les systèmes fluidiques

- la vitesse

dans les systèmes gravitationnels ou dans les systèmes mécaniques

- le voltage

dans les systèmes électrostatiques ou électrodynamiques

Une variable transitale (flot) nécessite seulement

un point de l'univers

pour être mesurée par un instrument

Cette variable transitale représente une mesure du flot traversant une surface élémentaire de l'univers

Ainsi sont des variables transitales (de flot)

- le transfert (transit) de chaleur

dans un système thermique

- le flot de fluide

dans un système fluidique

- la densité de courant

dans un système électrodynamique

Les paramètres du systèmes représentent

des propriétés intrinsèques de la matière constituant l'univers

Dans le cas des systèmes linéaires ces paramètres sont indépendant de toute entrée ou sortie

Les paramètres peuvent être

mesurés

en prenant un échantillon de la matière et en effectuant une expérience

Lors d'une telle expérience

une excitation connue

est appliquée à l'échantillon et

la réponse résultante est mesurée

La nature et la taille des paramètres sont déterminées par la relation entre ces excitations et les réponses mesurées

Les paramètres tombent invariablement dans seulement quatre classes de paramètres

- les dissipateurs, amortisseurs, ayant une dissipance

- les réservoirs de positales, les positeurs ayant une positance

- les réservoirs de transitales, les transiteurs ayant une transitance

- les modificateurs, ayant une memristance

Quand la matière est un disspateur pur, ne présente que de la dissipance, la relation entre la positale et la transitale est

une relation de proporitionnalité

Si on considère un univers présentant

une seule transitale

comme par exemple

un fil électrique

une différence de positale entre les deux extrémités du fil donne une transitale

∂positale / ∂x

=

*- dissipance * transitale*

Dans le cas multi-dimensionnel on a

***différentielle* *** *positale*

=

- dissipance **** transitale***

Le paramètre

dissipance

(1/résistance de l'électricité)

est une mesure de l'étendue dans laquelle la matière constituant le fil

dissipe l'énergie électrique en la convertissant en chaleur, une autre forme d'énergie

Dans le cas de systèmes de transfert de chaleur cela donne simplement un acroissement d'entropie

Ce paramètre de dissipance a divers noms selon les domaines scientifiques comme

- résistivité

pour les systèmes électriques

- viscosité

pour les systèmes fluidiques

- résistivité thermique

pour les systèmes de transfert de chaleur

Ce paramètre de dissipance est présent dans virtuellement tous les systèmes

L'univers peut aussi se comporter comme

un réservoir

s'il est capable de

stocker temporairement

de la matière ou de l'énergie

Dans le cas de

réservoir de positale

ce stockage se produit dès qu'une différence de posalité est appliquée à travers un échantillon d'univers et plus la différence de positale est grande, plus le stockage est important

Une capacité électrique par exemple

stocke de l'énergie électrique

dès que

une différence de potentiel

est appliquée entre ses bornes

Quand une résistance est appliquée entre les bornes de la capacitance chargée cette dernière produit un courant dans une direction tendant à s'opposer à tout changement de potentiel

Dans un univers monodimensionnel orienté selon l'axe x (u_1) on a

dtransitale

=

*- positance * dx * dpositale / dtemps*

Soit, si on fait tendre *dx* vers zéro

∂transitale / ∂x

=

*- positance * ∂positale / ∂temps*

Pour les systèmes multidimentionnels la relation devient

différentielle • transitale

=

*- positance * ∂positale / ∂temps*

La capacitance est le réservoir de positale des systèmes électriques

La compressibilité est le réservoir de positale dans les systèmes fluidiques

La capacité thermique (chaleur spécifique) est le réservoir de positale dans les systèmes termiques

Dans le cas de réservoirs de transitale, l'univers agit en stockant de l'énergie quand on y fait passer une transitale

L'inductance électrique (bobine) stocke l'énergie sous forme de champ magnétique quand on y fait passer un courant

Quand les bornes d'une bobine sont reliées par une résistance un voltage est produit avec une polarité, un sens, tendant à s'opposer à tout changement de courant

La relation entre transitale et positale est la suivante

∂positale / ∂x

=

*- transitance * ∂**transitale** / ∂t*

où transitance est une mesure de la propriété de réservoir de flot de l'univers

Dans le cas général

différentielle * positale*

=

*- transitance * ∂**transitale** / ∂t*

L'inductance distribuée ou l'inductivité est le paramètre réservoir de courant dans les systèmes électriques distribués

La densité ou l'inertie est le réservoir de transitale dans les systèmes fluides

Les systèmes thermiques ne présentent jamais la propriété de réservoir de transitale

Les principes et lois scientifiques (215)

Les principes qui justifient la nature analogue des problèmes *(de champ)* dans les divers domaines scientifiques sont connus comme

principes de conservation et de continuité

Le principe de conservation s'applique aux quantités dont la transitalité est mesurée par une variable transitale (through)

Selon ce principe le total de cette transitale être égale à la somme algébrique nette des

- entités ajoutées ou retranchées par les excitations externes

plus

- les entités initialement présente dans l'univers au temps initial

Dans un système électrique

la charge électrique est conservée

Dans un système mécanique

l'élan (momentum, impulse) est conservé

Dans un système fluidique

la masse est conservée

Le principe de continuité concerne aussi les transitales (through) et précise que la transitale doit être continue et doit

- émaner d'une positale (endotransitale ou exotransitale)

et

- retourner à la même positale ou aller à une autre positale

Généralement

le principe de conservation

implique

le principe de continuité

et vice-versa

C'est généralement pour des motifs de convention ou de terminologie que l'un des deux principes a assumé un rôle prédominant dans des domaines scientifiques spécifiques

Une procédure déductive pour modéliser (217)

La similitude des modèles scientifiques est largement due à la similitude de méthode utilisée pour dériver les modèles

Quelle que soit la discipline scientifique un modèle implique

- l'univers et le temps comme variables indépendantes

et

- les quatre paramètres du champ en proportions variables

Les lois gouvernant le système prennent toutes la formes de

lois de conservation

Les équations aux dérivées partielles représentant un système peuvent être dérivées en utilisant une méthode virtuellement indépendante du problème considéré

Elle est constituée par les étapes suivantes

- identifier les paramètres présents avec une taille non-négligeable

Un univers peut présent les quatres types de paramètres

. dissipance

. positance

. transitance

et

. mémristance

Les quatre paramètres peuvent être présents mais selon les besoins certains peuvent être négligés pour déterminer les distributions des positales et des transitales

Un fil électrique, par exemple, peut présenter

. de la positance (inductance)

et

. de la transitance (capacitance)

mais les deux peuvent être négligées dans la détermination de la distribution de positale le long du fil de telle sorte que seule

. la dissipance (résistance) est prise en compte

- fixer les dimensions de l'univers

dans lequel le problème doit être formulé ainsi qu'un référentiel approprié

Les systèmes physiques, par exemple, existent tous

en trois dimensions

et les représentations en une ou deux dimensions impliquent obligatoirement des simplifications

En général

un référentiel orthogonal

est préféré à moins qu'il existe

. une symétrie axiale (référentiel cylindrique)

ou

. une symmétrie ponctuelle (référentiel sphérique)

- sélectionner un domaine (region, volume) typique

La forme de ce domaine dépend du nombre de dimensions universelles autant que du référentiel choisi

Si le système peut être modélisé selon une seule dimension le domaine est une arête (un segment de droite)

dx

Si deux axes sont nécessaires, le domaine sera un rectangle

*dx * dy*

Si trois axes sont nécessaires, le domaine sera un cube

*dx * dy * dz*

Ces éléments sont considérés comme typique du système étudié

Cela revient à dire qu'une description de la distribution des positales et des transitales dans

un domaine élémentaire

est considérée comme

représentative de tout le domaine inclus dans certaines frontières

- représenter les transitale à travers la frontière du domaine élémentaire

et ceci en terme des posalités ainsi que de leurs différentielles par rapport à l'univers et au temps

Pour les univers à une, deux ou trois dimentions celà donne lieu à deux, quate et six équations respectivement

Ces équations sont dérivées de

***différentielle** * *positale*

=

- dissipance * ***transitale***

———

différentielle • transitale

=

*- positance * ∂positale/ ∂temps*

―――

différentielle* * *positale

=

*- transitance * ∂**transitale** / ∂t*

- calculer la transitale nette dans le domaine

Quand l'univers est purement dissipatif cela implique seulement la sommation des transitales à travers toutes les frontières du domaine

Quand des réservoirs sont présentes le stockage dans les éléments doit aussi être pris en compte

- invoquer le principe de conservation

s'appliquant dans la discipline scientifique à laquelle le système appartient

- faire tendre les dimensions du domaine vers zéro

Types de PDE (218)

La méthode ci-dessus résulte en

une équation aux dérivées partielles

caractérisant l'entier de l'univers

A part

la science de l'élasticité

les termes apparaissant dans les équations sont limités à des différentielles premières et secondes par rapport à l'univers et au temps

Une méthode classique de classer les équations aux dérivées partielles de base découle de la forme mathématique des solutions

Les équations gouvernant un univers scientifique ont la forme générale suivante

A * ∂^2*comportement / ∂une*^{2}

+

B * ∂^2*comportement / ∂une * ∂deux*

+

C * ∂^2*comportement / ∂deux*^{2}

=

*D * ∂comportemen / ∂une*

+

*E * ∂comportement /∂deux*

+

*F * comportement*

+

G

En permettant aux paramètre *A, B, C, D, E, F* et *G* de prendre des valeurs négatives, nulles ou positives, toutes les équations ordinaires de second ordre peuvent être exprimées comme un cas particulier de l'équation ci-dessus

Les deux variables indépendantes *une* et *deux* peuvent être

- toutes deux des coordonnées universelles

ou

- une coordonnée universelle et l'autre le temps

La taille relative des *A, B* et *C* détermine la nature de l'équation

- si $A * C > B^2$ comme c'est le cas quand $B = 0$ et *A* et *C* sont positifs l'équation est

élliptique

Cette définition s'applique même si un autre terme

$H * \partial^2 comportement / \partial trois^2$

où H est un nombre positif est ajouté à gauche de l'équation de telle sorte que les comportements tri-dimensionnels soient ajoutés à cette définition

- si $A * C = B^2$ comme c'est le cas si B et soit A ou C sont nuls l'équation est parabolique

L'addition d'une différentielle seconde comme

$H * \partial^2 comportement / \partial trois^2$

n'influence pas le caractère fondamentalement parabolique de l'équation

- si $A * C < B^2$ comme c'est le cas si B est positif ou nul et soit A ou B sont négatifs l'équation est hyperbolique

La répartition des équations dans ces trois catégories est intéressante car les solutions analytiques et les méthodes numériques pour les traiter sont inhérentement différentes pour les trois types d'équation

Les systèmes élliptiques (219)

Les équations élliptiques représentent des systèmes distribués dans lesquels un seul des quatre paramètres est présent de manière non-négligeable dans l'univers

Tous les univers qui sont

- des dissipateurs purs

- des positeurs purs

ou

- des transiteurs purs

sont caractérisé par une équation elliptique

En outre les univers contenant de la dissipation ainsi que des réservoirs sont caractérisés par des équations élliptiques quand ils ont atteint ou sont à l'équilibre

Forme de base

La plus connue de ces équations est l'équation de Laplace

C'est l'équation de base de

la théorie potentielle

et elle existe dans pratiquement tous les domaines scientifiques

Le comportement

comportement

est souvent remplacée par le mot

potentiel

puisqu'aucune confusion n'est possible

Si on considère par exemple un univers constitué par un fil conducteur de transitale ayant une dissipance constante

dissipance / unité de longueur

Si une de ses extrémités est reliée à une source constante de positale

$positale_0$

et l'autre extrémité est reliée à une source constante de positale nulle, la terre

En utilisant la méthode décrite plus haut on constate qu'on a affaire à un système présentant de la dissipance mais très peut de positance ou de transitance

Cet l'univers est supposé purement dissipatif il ne peut pas présenter du stockage

On considère également l'univers comme constitué d'un seul axe x

Un domaine de cet univers a deux frontières situées en

x_1

et

x_2

On sait que l'équation générale en une position vue plus haut est

$$\partial positale / \partial x$$

$$=$$

$$- dissipance * transitale$$

Si on considère les deux positions extrèmes *1* et *2* on a les deux relations suivantes entre positale et transitale

$$(dpositale / dx)_1$$

$$=$$

$$- dissipance * transitale_1$$

et

$$(dpositale / dx)_2$$

$$=$$

$$- dissipance * transitale_2$$

En accord avec le principe de conservation on a

$$transitale_2 - transitale_1$$

$$=$$

$$dissipance$$

En résolvant les deux équations pour les deux transitales et en substituant dans l'équation de conservation ci-dessus on a

$$1/dissipance * (\partial positale / \partial x)_1 - (\partial positale / \partial x)_2$$

$$=$$

$$0$$

En multipliant les deux côtés de cette équation par la dissipance *dissipance*

et

en divisant les deux côtés par *dx* cette équation devient

$$((\partial positale / \partial x)_2 - (\partial positale / \partial x)_1)) / dx$$

$$=$$

$$0$$

Si on diminue la taille du domaine *dx* en la faisant tendre vers *0* cela donne

$$\partial^2 positale / \partial x^2$$

$$=$$

$$0$$

Cette équation est connue comme

équation de Laplace à une dimension

Sa solution tant analytique que numérique donne la fonction

positale(x)

à savoir la positales en tout point de l'univers

Une telle solution n'existe que si la positale ou la transitale à la frontière du domaine sont spécifiés

- en $x = 0$ on a

$$positale = positale(0)$$

et

- en $x = L$ on a

$$positale = posalité(L) = 0$$

L'équation de Laplace peut être représentée de manière plus compacte en introduisant le laplacien c'est à dire ***différentielle***^{2}

Quel que soit le nombre de dimensions de l'univers l'équation de Laplace devient

différentielle* • *(différentielle * *positale)*

=

0

ou

différentielle^2 * *positale*

=

0

Les excitations à la frontière peuvent être exprimées (spécifiées) en termes de positale comme dans l'exemple précédent

Comme des sources de transitale peuvent également exister dans la réalité il y a deux types de conditions à la frontière

- une positale spécifiée

et

- une transitale spécifiée

S'il n'y a pas de transitale à travers une frontière non excitée, la différentielle de positale normale à cette frontière est nulle

Si une transitale non nulle est spécifié à une frontière, la différentielle de positale normale à cette frontière doit être directement proportionnelle à cette transitale

Les excitations aux frontières peuvent donc être exprimées sous forme générale

positale

=

k_1

et

*∂positale / ∂**normale***

=

k_2

où k_1 et k_2 sont des constantes ou des fonctions spécifiées des variables universales et peuvent être négatives, nulles ou positives

Formes modifiées

Les modèles caractérisés par une équation elliptique ont la forme compacte et simple

différentielle^2 * *positale*

seulement si

un nombre de simplifications explicites ou implicites

sont faites durant la dérivation du modèle

On peut considérer trois formes modifiées de l'équation de Laplace apparaissant souvent en science

Ces formes incluent des modifications dues à

- *la non uniformité des paramètres*

- *des référentiels mouvants*

et

- *des sources distribuées de transitales*

Non uniformités des paramètres

Une caractéristique intéressante des équations

$\partial^2 positale / \partial x^2$

=

0

et

différentielle • (différentielle * *positale)*

=

différentielle^2 * *positale*

est que le paramètre dissipatif *dissipance* n'apparait pas explicitement

Il s'ensuit que la distribution de positale dans l'univers est indépendante de la taille de ce paramètre ce qui est normal

Il est évident que

la positale au milieu d'un fil

est égale à

la moitié de la différence de positale entre les deux frontières

si la dissipance est constante tout le long du fil

Il y a donc une hypothèse implicite que l'univers est

uniforme

et

isotrope

Quand la dissipance n'est pas indépendante de l'univers des modifications doivent être apportées à l'équation

Si l'univers consiste par exemple en deux parties de dissipances différentes ces deux parties peuvent être considérées comme deux parties différentes et on a deux systèmes en interaction

Dans ce cas

le principe de conservation

exige que la transitale au niveau de la jonction des deux systèmes soit la même des deux côtés de la jonction et donc spécifie une condition à la frontière entre les deux systèmes

Cela revient au final à traiter deux systèmes ayant la même équation

Plus généralement la dissipance peut être spécifiée comme

une fonction de l'univers

soit par

une expression analytique

soit par

un tableau

Si on considère un univers à une seule dimension et que

dissipance

=

dissipance(x)

les différentielles de positales aux deux extrèmités deviennent

$transitale_1$

=

$- 1/dissipance_1 * (dpositale/dx)_1$

et

$transitale_2$

=

$- 1/dissipance_2 * (dpositale/dx)_1$

où $dissipance_1$ et $disspance_2$ sont les dissipances locales au extrémités *1* et *2*

L'équation

$((\partial positale / \partial x)_2 - (\partial positale / \partial x)_1)) / dx$

=

0

devient

$1/dx * (1/disspance_2 * (dpositale/dx)_2 - 1/disspance_1 * (dpositale/dx)_1$

=

0

Quand on fait tendre *dx* vers zéro on obtient

*∂/∂x (1/dissipance(x) * ∂positale/∂x)*

=

0

La relation fonctionnelle entre la dissipance et l'univers est maintenant incluse dans la différentielle seconde

La forme à trois dimensions devient

∂/∂x (1/dissipance ∂positale/∂x)*

+ ∂/∂y (1/dissipance ∂positale/∂y*

+ ∂/∂z (1/dissipance ∂positale/∂z*

=

0

ce qui donne en notation plus compacte

différentielle • *(1/dissipance ** ***différentielle*** ** positale)*

=

0

Les dérivations ci-dessus et la forme compacte sont valables également dans des univers où la dissipance est fonction le la positale

Dans ces conditions l'univers est considéré comme non-linéaire et certaines techniques de résolution comme le théorème de superposition sont inapplicables

Coordonnées mobiles

Une seconde modification de l'équation de Laplace intervient dans la représentation d'univers dans lesquels le milieu à travers lequel le transit intervient est lui-même en mouvement

Ceci est équivalent à considérer que l'origine des axes par rapport à laquelle toutes les positions dans l'univers sont mesurées se meut à une certaine vitesse

Considérons l'étude d'un transfert de chaleur dans le cas statique ou à l'équilibre, un phénomène représentable par l'équation de Laplace

Si l'univers est un fluide est au repos, la distribution de température dans cet univers est représenté par l'équation de Laplace

différentielle^2 * *positale*

=

0

Si le fluide constituant le milieu se meut dans la direction x, le transfert de chaleur est influencé non seulement par la différentielle (gradient) de température comme vu plus haut c'est-à-dire

dpositale/dx

=

- dissipance * transitale

ou encore en multi-dimensionnel

différentielle * *positale*

=

dissipance * ***transitale***

mais aussi par la vitesse des particules fluides elles-mêmes

L'équation

différentielle^2 * *positale*

=

0

doit donc être modifiée pour prendre en compte ce phénomène

En monodimensionnel celà donne

$$d^2 positale / dx^2$$

$$=$$

$$alpha * \mathbf{vitesse}_x * dpositale / dx$$

et en tri-dimensionnel

$$\partial^2 positale / \partial x^2 + \partial^2 positale / \partial x^2 + \partial^2 positale / \partial x^2$$

$$=$$

$$alpha * (vitesse_x * \partial positale/\partial x + vitesse_y * \partial positale/\partial y + vitesse_z * \partial positale/\partial z$$

et en notation compacte

$$\mathbf{différentielle}^2 * positale$$

$$=$$

$$alpha * \mathbf{vitesse} \bullet \mathbf{différentielle} * positale$$

Ce terme de vitesse peut être constant où être lui-même fonction de l'univers ou de la positale

Endotransitales

Une autre modification importante de l'équation de Laplace si des sources ou des puits sont actifs dans l'univers, c'est-à-dire si on a de l'endotransitale

Dans un conducteur électrique fait de métal en condititon stable la distribution de température est représentée par l'équation de Laplace

$$\mathbf{différentielle}^2 * positale$$

$$=$$

$$0$$

Cependant si on fait transiter un courant électrique à travers cette matière, de la chaleur va être générée en tout point de cet univers c'est-à-dire qu'il va y avoir un terme de dissipation

$$transitale * dissipance^2$$

qui va affecter la distribution de température

Un phénomène similaire a lieu si on considère la distribution statique dans un coeur de réacteur nucléaire dans lequel de la chaleur est générée par des particules radiactives distribuées dans le réacteur

Dans ces conditions les parties différentielles doivent être modifiées en

$$transitale_2 - transitale_2 = -transitale_i * dx$$

où

$$transitale_i$$

est la transitale additionnelle par unité de longueur

Et les tridimensionnelles en

$$transitale_1 - transitale_2 + transitale_3 - transitale_4 + transitale_5 - transitale_6$$

=

$$- transitale_i * dx * dy * dz$$

où $transitale_i$ est la transitale additionnelle par unité de volume coulant dans la partie comme résultat d'une endotransitale distribuée

L'équation de Laplace prend alors la forme

$$\boldsymbol{différentielle} \bullet (1/dissipance * \boldsymbol{différentielle} * positale)$$

=

$$- k * transitale_i$$

pour

$$dissipance$$

=

$$dissipance(x,y,z)$$

La transitale $transitale_i$ peut elle-même être une fonction de l'univers ou de la positale

Cette équation est connues sous le nom d'équation de Poisson

Les conditions aux frontières des formes modifiées de l'équation de Laplace sont identiques à celles de la forme de base de l'équation représentée par les équation

positale

=

k_1

et

*∂positale / ∂**normale***

=

k_2

où k_1 et k_2 sont des constantes ou des fonctions spécifiées de l'univers et peuvent être négatives, nulles ou positives, avec ***normale*** comme direction normale à la frontière

Propriétés générales et applications

Il est évident que l'équation de Laplace ne contient pas la variable

temps

C'est un résultat direct du fait que

seul l'un des quatre types de paramètres est présent (dissipance) dans le système

La conséquence directe de l'absence des autres types de paramètres, en particulier réservoirs de positale et réservoirs de transitale, est que

si

- l'excitation est une fonction du temps

alors

- la réponse partout dans le système a exactement les même caractéristiques temporelles que l'excitation

et

- l'état d'équilibre est atteint instantanément en tout point dans l'univers

Si la positale appliquée à la frontières change soudainement (un saut, step) la positale en tout point du champ va changer au même instant à de nouvelles valeurs

Ceci peut aussi être démontré si l'univers contient uniquement

- des réservoirs de positale

ou uniquement

- des réservoirs de transitale

Le point clef est que si l'univers est composé d'un seul des quatre paramètres le temps n'est pas une variable indépendante

Le temps disparait aussi dans de telles circonstances et l'équation de Laplace s'applique dans des univers qui contiennent des réservoirs tout comme de la dissipance dans la mesure où assez de temps s'est écoulé depuis une changement précédent de l'excitation de manière telle que les conditons d'équilibre aient été atteintes

Une seconde propriété important de tous les modèles précédents à l'exception de ceux caractérisés par l'équation

différentielle • *(1/dissipance ** ***différentielle*** ** positale)*

=

*- k * transitale*$_i$

est que les excitations sont placées uniquement aux frontières du domaine

Aucune endopositale ou endotransitale n'est présente dans l'univers

Selon le principe de conservation toute l'énergie ou la matière entrant ou quittant le domaine doivent être dues à des sources extérieures et toutes les lignes de transit doivent se terminer aux frontières

Ceci implique directement qu'il ne peut y avoir ni minima ni maxima de positale dans le domaine

Comme

- la présence d'une telle positale maximale impliquerait qu'une position dans le domaine ait une positale supérieure à celle des positions environnantes

et

- le transit va toujours de la positale élevée la positale basse un tel maximum signifierait que la matière ou l'énergie émane dans toutes les directions de cette position

En analyse vectorielle un tel phénomène est connu comme

la divergence

les univers représentés par les équations de Laplace doivent avoir une divergence nulle

De même un minimum de positale impliquerait un puits de matière ou d'énergie et violerait à nouveau les principes de conservation et de continuité

Ceci signifie aussi que les gradients de positale ne peuvent pas changer de polarité dans le champ

La raison pour la grande applicabilité des équations de Laplace et de Poisson est que de nombreux systèmes ne présentent que l'un des quatre paramètres et que les principes de conservation et de continuité leur sont applicables

Une revue des applications scientifiques de ces équations puissantes nécessiterait de longs complexes développements particuliers

On peut se concentrer sur quelques domaines souvent rencontrés dans la réalité

Trois forces matérielles de base existent en physique

- les champs de force générés par des masses

- les champs de force générés par des charges électrique

et

- les champs de force générés par des poles magnétiques

Toutes les régions de l'univers qui ne contiennent pas ces forces universelles sont gouvernées par l'équation de Laplace

Les champs gravitationnels, électrostatiques et magnétiques sont donc sujets au même type d'analyse que celles ci-dessus

La variable positale de chacun de ces trois domaines scientifiques est en général appelée *la fonction potentielle*

Elle a une signification analogue à nos *positales* employées ci-dessus

Ainsi le symbole

comportement (phi)

est souvent employé pour signifier une fonction potentiel générale

Le concept de fonction potentielle peut aussi être étendue à certains systèmes fluides où *comportement (phi)* est le potentiel vitesse et est défini comme

∂*comportement* / ∂x_i

=

- $vitesse_{xi}$

avec x_i représentant la vitesse d'une particule fluide dans la direction *i*

Comme l'équation de Laplace s'applique uniquement à des systèmes comprenant

un seul type de paramètre

une analyse précise du système doit être faite avant d'utiliser l'équation

Si les particules liquides son forcées à travers un milieu contenant de minuscules canaux comme dans du sable par exemple, les forces sur le fluide dues aux frictions visqueuses sont nettement plus grandes que les forces inertielles

Et si en plus le fluide est supposé incompressible cela suppose qu'il n'y a pas de stockage de particules fluides le système est purement dissipatif et l'équation de Laplace peut être utilisée

Quand un fluide incompressible coule dans un canal ouvert ou un tyuau il est fréquement permis de supposer que c'est un fluide idéal ayant une viscosité négligeable

Dans ces conditions les forces inertielles (l'énergie cinétique) sont les seules à considérer et un tel système peut de nouveau être représenté par l'équation de Laplace

La variable transitale dans un système fluide est la vitesse de translation des particules fluides

Comme les particules fluides peuvent aussi tourner autour de leur propre axe il est nécessaire que le transit soit irrotationnel pour que l'équation de Laplace soit utilisable

En mécanique, l'équation de Laplace est utilisée pour décrire la déformation statique de membranes élastiques ayant une masse négligeable

Ces systèmes se comportent comme des ressorts purs (réservoirs de potentiel, de positale)

Dans les problèmes de transfert de chaleur, il est généralement impossible de décrire le comportement par un seul des quatre paramètres

Les système de transfert de chaleur dans lesquels l'excitation varie dans le temps ne peuvent pas être représentés par l'équation de Laplace

Si des conditions d'équilibre ont été atteintes cependant les réservoirs de positale (potentiel) ont acquis toute la chaleur qu'ils peuvent stocker et n'exercent plus aucune influence sur les transferts de chaleur

Sous ces conditions la température dans le système est une fonction potentielle représentée par la même équation et des condition de frontière analogues aux conditions aux frontières des systèmes précédents

L'équation de Poisson apparait dans les domaines scientifiques ci-dessus quand il existe des endotransitales distribuées

Le champ gravitationnel dans un solide comme la terre, le champ magnétique dans un aimant et le champ électrostatique dans un vide contenant des charges sont tous des exemples d'une telle situation

L'équation est également applicable en mécanique dans l'étude des efforts et déformations de torsion et en transfert de chaleur quand des sources distribuées de chaleur sont présentes tout comme dans de nombreux autres domaines

Dans les équations dérivées dans le présent chapitre la positale *positale* est la variable dépendante

La solution de ces équations donnent des valeurs de la positale comme une fonction des dimensions x, y et z de l'univers

Les ordinateurs génèrent en général des solutions sous forme de tableaux donnant des positales en des positions x, y et z espacées du domaine

Dans certaines occasions des solutions pour un univers bi-dimensionnel x, y et pour des section d'un univers tri-dimensionnel sont fournies comme des lignes d'équipositale (équipotentielles)

Parfois une solution pour la distribution des transitale est préférée à une solution pour les positales

En accord avec l'équation

différentielle * *positale*

=

- dissipance * ***transitale***

la flèche de transitale en toute position du champ est proportionnelle à la différentielle de la positale

Elle est donc perpendiculaire à une ligne de positale constante puisque la différentielle (gradient) de positale est nul selon cette ligne

Ceci implique que les lignes de transitale constante sont perpendiculaires aux lignes d'égal positale en tous points du champ

Un fois que les valeurs de la positale ont été déterminées dans un problème la solution pour la transitale en tous point du champ peut être obtenue très facilement

Alternativement la transitale peut être employée comme variable dépendante dans la dérivation des équations

Cela donne des équations qui sont structurellement similaires à celles dérivées pour les positales

Les équation paraboliques (232)

Forme de base

Figurant parmi les équations les plus fondamentales de la science avec l'équation de Laplace, l'équation parabolique est plus connue sous les noms de

- équation de diffusion

ou

- équation de conduction

Dans ce cas l'univers contient

- une dissipance distribuée

mais aussi

- des propriétés d'accumulation de positale ou de transitale sous forme d'enpositale ou d'entranstitale

Une telle équation considérée dans le domaine électrique électrique peut représenter

- une résistance (dissipance)

couplée à la terre au moyen de

- un diélectrique (réservoir de positale, positance)

Une telle équation peut aussi représenter un conducteur thermique présentant

- un résistance thermique (dissipance)

et

une capacité thermique (réservoir de positale, positance)

En monodimensionnel, dans une partie différentielle de l'univers, en plus des transitales $\boldsymbol{transitale_1}$ et $\boldsymbol{transitale_2}$ aux extrémités de l'univers considéré, il-y-a maintenant une $transitale_3$ consernant la transitance

Le principe de conservation spécifie que la somme des transitales doit être nulle

$$\boldsymbol{transitale_1} - \boldsymbol{transitale_2} - \boldsymbol{transitale_3}$$

$$=$$

$$0$$

Si les propriétés de stockage de positale par unité de longueur sont exprimées par

positance

la transitale servant à remplir le réservoir présent dans l'élément différentiel peut se représenter comme

$$\boldsymbol{transitale_3}$$

$$=$$

$$\boldsymbol{transitale_1 - transitale_2}$$

$$=$$

$$positance * dx * \partial positale / \partial t$$

où

positale

est la positale moyenne de l'élément différentiel mesurée par rapport à la terre (au zéro)

et

*positance * dx*

est la capacité de stockage totale du réservoir constitué par cet élément

La différence entre ***transitale$_1$*** et ***transitale$_1$*** exprimée en terme de taux de changement de transitale par unité de longueur vaut

transitale$_1$ - transitale$_2$

=

*- ∂**transitale** / ∂x * dx*

si les termes d'ordre élevé de l'expansion de Taylor sont négligés

Mais en accord avec l'équation

dpositale / dx

=

*- dissipance * **transitale***

et plus généralement selon l'équation

différentielle * *positale*

=

*- dissipance * **transitale***

la transitale peut s'exprimer en termes de différentielle de positales (gradient de positales)

transitale

=

*1 / dissipance * ∂positale / ∂x*

où *dissipance* représente toujours la dissipance par unité de longueur

Cette équation correspond à la fameuse équation électrique *courant*

=

*1 / résistance * potentiel*

de l'électricité

En différentiant l'équation

transitale

=

*1 / dissipance * ∂positale / ∂x*

par rapport à *x* on obtient

- *∂**transitale**/ ∂x*

=

∂ / ∂x (1 / dissipance ∂positale / ∂x)*

En combinant les équations

***transitale**$_3$*

=

***transitale**$_1$* **-** ***transitale**$_2$*

=

*positance * dx * ∂positale / ∂t*

et

***transitale**$_1$* **-** ***transitale**$_2$*

=

- *∂**transitale** / ∂x * dx*

et cette dernière équation

$$- \partial \boldsymbol{transitale} / \partial x$$

$$=$$

$$\partial / \partial x \, (1 / dissipance * \partial positale / \partial x)$$

on obtient l'équation

$$\partial/\partial x * (1 / dissipance * \partial positale/\partial x)$$

$$=$$

$$positance * \partial positale / \partial temps$$

Si on suppose que la dissipance n'est pas une fonction de *x* c'est-à-dire que le conducteur est uniforme on trouve

$$\partial^2 positale / \partial x^2$$

$$=$$

$$dissipance * positance * \partial positale / \partial t$$

Cette équation est connue comme

équation de diffusion à une dimension

Une spécification complète du problème nécessite que les positales

$$positale(x_0, t_0)$$

et

$$positale(x_L, t_0)$$

aux deux extrémités de la ligne en tout instant subséquent à l'instant initial

$$t = 0$$

ainsi que la positale

$$positale(x, t_0)$$

partout le long du champ à l'instant initial

Ce type de problème nécessite donc plus d'information que l'équation de Laplace monodimensionnelle

Etant données les équations

$\partial^2 positale / \partial x^2 * (1 / dissipance * \partial positale / \partial t)$

=

$positance * \partial positale / \partial t$

ou

$\partial^2 positale / \partial x^2$

=

$dissipance * positance * \partial positale / \partial t$

et les conditions aux limites et les conditions initiales, la positale

- en tout point le long de l'univers

- pour tous les instants $t > 0$

peut être déterminé

L'équation pour un univers tridimensionnel contenant de la dissipanceet l'un des deux types de réservoir, positance ou transitance, peut être dérivée de manière similaire

Dans ce cas l'élément différentiel est un cube mais ayant en plus une propriétés de stockage distribuée *positance* par cube unité

Pour une dissipance uniforme on obtient

$\partial^2 positale / \partial x^2 + \partial^2 positale / \partial y^2 + \partial^2 positale / \partial z^2$

=

$dissipance * positance * \partial positale / \partial t$

En introduisant à nouveau la bi-différentielle (laplacien) les équations peuvent être généralisées et deviennent

différentielle* • *(1/dissipance * ***différentielle * positale***

=

*positance * ∂positale / ∂t*

ou

différentielle^2 * *positale*

=

*k * ∂positale / ∂t*

oû k est déterminé par les paramètres du système

Les conditions aux frontières de cette équation sont les mêmes que pour l'équation de Laplace exprimées par les deux équations

positale

=

k_1

et

*∂positale / ∂**normale***

=

k_2

où k_1 et k_2 sont des constantes ou des fonction des variables universales et peuvent être néagitfs, nuls ou positifs et où ***normale*** est la direction perpendiculaire à la frontière

En outre une condition initiale doit être ajoutée spécifiant la quantité stockée dans le réservoir au temps initial

Si de la positance (réservoir de positale) est présente la distribution de positale initiale

positale(x, y, z, t_0*)*

doit être fournie

Si de la transitance est présente, le taux de changement initial de positale

∂positale(x, y, z, t_0*) / ∂t*

peut être fournie à la place

Formes modifiées

Toutes les modifications concernant les équations elliptiques s'appliquent aux équations paraboliques

Quand l'univers dans lequel le transit a lieu (la diffusion) est lui-même en mouvement l'équation devient

différentielle . *(1/dissipance* * ***différentielle*** * *positale)*

=

positance * *∂positale / ∂t* + *alpha* * ***vitesse*** • ***différentielle*** * *positale*

où

vitesse

est la vitesse de l'univers

De tels univers sont dits univers combinant diffusion et transport de masse

La présence de d'endotransitale répartie dans les systèmes contenant de la dissipance et un des deux types de réservoir impliquent l'addition d'un terme proportionnel à l'endotransitale distribuée dans la partie droite de l'équation de diffusion

Pour les univers non uniformes l'équation devient

différentielle • *(1/dissipance* * ***différentielle*** * *positale)*

=

positance * *∂positale / ∂t* - ***endotransitale***

Applications

La nature du réservoir, positance ou de transitance n'a pas été spécifiée dans les dérivations

On a simplement supposé que l'un ou l'autre type de réservoir était présent

En termes généraux les développements ci-dessus mènent à la conclusion que l'équation de diffusion

différentielle^2 ** positale*

=

*k * ∂positale / ∂t*

est caractèristique de systèmes qui sont dissipatifs et contiennent un des types de réservoir

Ce réservoir peut être de positale ou de transitale mais un seul type peut être présent dans le système

La présence de ce réservoir avec la dissipance implique que la réponse n'atteint pas sa valeur finale instantanément comme dans les champs représentés par les équations de Laplace

Le paramètre dissipatif impliqué est généralement qualifié de

amortissement

et il agit en combinaison avec le paramètre de stockage pour retarder l'atteinte des valeurs finales

La constante *k* est déterminée par les paramètres du système et est une mesure de ce délai

Le temps est alors incontestablement une variable indépendante dans de tels problèmes

La présence d'un seul type de réserevoir plutôt que les deux types implique que

- les valeurs de la positale dans un univers

en réponse à

- un changement soudain d'excitation à la frontière

est approché de manière monotone c'est-à-dire qu'il n'y a pas de changement de polarité du gradient de positale ni de dépassement de la valeur finale de la positale

Pour cette raison l'équation de diffusion est parfois qualifiée de

équation d'égalisation

Le taux auquel la valeur finale est approchée est déterminée par les paramètres dissipatifs et de stockage

Alors que l'équation de Laplace pour les univers uniformes est indépendante des caractéristiques de l'univers, cela n'est pas vrai pour l'équation de diffusion

Les paramètre de l'univers doivent être fournis pour permettre la prédiction des positales transitoires

Il est clair que si des conditions d'équilibre existent c'est-à-dire qu'aucune des excitation n'est une fonction du temps et qu'un temps suffisant s'est écoulé depuis un quelconque changement d'excitation alors le terme

∂positale / ∂t

de l'équation de diffusion disparait et le laplacien devient nul

L'équation de Laplace peut donc être considérée comme un cas spécial ou dégénéré de l'équation de diffusion

Ceci explique, comme précisé précédemment, pourquoi les problèmes d'univers représentés par l'équation de diffusion sont décrits par une équation de Laplace en condition statique ou stationnaire

L'équation de diffusion trouve de nombreuses application dans les problèmes impliquant deux types d'éléments dont seul l'un des deux est un réservoir

Dans les problèmes de transfert de chaleur le système étudié est souvent un univers tri-dimensionnel contenant une résistance thermique et une capacitance thermique qui agissent respectivement comme dissipance et positance

La résistance thermique n'est pas n'est pas

un paramètre dissipatif d'énergie

comme une résistance électrique en ce sens qu'aucune énergie n'est réellement convertie

Néanmoins par des considérations d'entropie on peut raisonner comme si les deux dissipance jouent le même rôle dans leur domaine respectif en ce sens que les deux retardent ou amortissent l'atteinte de la réponse finale

L'équation de diffusion permet donc la détermination de la température partout dans l'univers thermique pour tous les instants suivant l'instant initial étant entendu que la température ou le transfert de chaleur, ainsi que la distribution de température initiale dans l'univers à l'instant initial soient fixées

Comme son nom le laisse supposer l'équation de diffusion décrit aussi la diffusion des particules d'un type de fluide dans un univers occupé par un autre type de fluide

La diffusion de monoxide de carbone dans de l'air immobile ou la diffusion d'encre dans de l'eau stagnante sont représentables par cette équation

Dans de tels problèmes l'attention du scientifique porte souvent sur la concentration de l'un des deux fluides et cette concentration, ou densité, considérée comme la positale est la variable dépendante du système

Le transfert de particules (variable transitale) est alors lié à la différentielle de la densité des particules (variable positale) qui est relié à son tour à la liberté avec laquelle les molécules sont capables de se mouvoir dans l'univers

En même temps il existe un stockage de particules fluides dans tout élément de volume du fluide

Ce stockage est proportionnel à la densité des particules

Donc tout élément volumique de l'univers comprend un réservoir de la positale qu'est la densité

L'équation de diffusion sous de telle conditions est généralement exprimée comme

différentielle^2 ** densité*

=

*1/diffusivité * ∂densité / ∂t*

où *densité* est la densité des particules

Le même raisonnement s'applique pour l'absorption de particules fluides par des solides et au sèchage de solides saturés de liquides

On a vu que quand un fluide coule dans un canal ouvert ou un milieu poreux

- les forces visqueuses correspondent à la dissipance

- l'inertie des particules fluides correspond a un réservoir de transitale

et

- la compressibilité à un réservoir de positale

Le problème des transports de fluides irrotationnels dans lequel apparaissent des forces visqueuses et inertielles l'équation de diffusion peut être utilisée pour prédire le potentiel vitesse ou la pression en tout point du flot

La même chose est vraie pour des problèmes impliquant la compréhension de flots visqueux de fluides compressibles quand les forces d'inertie peuvent être négligées comme le cas d'un flot dans un milieu poreux

Une équation importante de l'électromagnétisme est l'équation d'effet de peau reliant la densité de courant le long du conducteur à sa conductivité (dissipation) et à la perméabilité magnétique (réservoir de transitale)

différentielle ** transitale (densité de flot)*

=

*conductance * perméabilité * ∂transitale / ∂t*

Cette équation a évidemment la forme d'une équation de diffusion comme on peut s'y attendre en considérant les deux types de paramètres impliqués

En général en électromagnétisme les équations de Maxwell se réduisent à la forme d'une équation de diffusion dans des champs qui ont de la conductivité mais dans lesquels soit la perméabilité soit la constante diélectrique peuvent être négligées

Il faut prendre garde en utilisant ces équations car la fonction positale dans ce cas est

une flèche ayant à la fois une taille et une direction

alors que dans les exemples précédents c'est

un nombre

Les champs dynamiques contenant un amortissement visqueux tout comme une masse ou une élasticité mais pas les deux peuvent aussi être représentés par l'équation de diffusion

La déflexion d'un ressort ou d'une membrane élastique de masse négligeable par exemple est représentable par cette équation

Equations hyperboliques (239)

L'équation d'onde

La troisième équation scientifique classique est connue sous le nom de

équation d'onde

Elle decrit en particulier le mouvement familier des vagues

Dans ce cas un système contient des paramètres distribués qui sont tant

- des réservoirs de positale

que

- des réservoirs de transitale

mais

- aucun paramètre de dissipation

Un tel système peut représenter un ligne de transmission électrique de résistance négligeable mais présentant une inductivité et un couplage diélectrique avec la terre

En accord avec les équations

*∂**transitale** / ∂x*

=

- positance ∂positale/ ∂temps*

ou

différentielle • transitale

=

*- positance * ∂positale / ∂t*

le taux de changement de la transitale le long du système s'exprime par

∂transitale / ∂x

=

*- positance * ∂positale / ∂t*

où *positance* représente la capacité du réservoir de positale par unité d'univers

De manière similaire la différentielle de positale est liée au taux de changement de transitale par l'équation

∂positale / ∂x

=

*- transitance * ∂transitale / ∂t*

Les équations ci-dessus sont des généralisations des équations bien connues des circuits électriques

courant

=

*capacitance * dpotentiel / dt*

et

potentiel

=

*inductance * dcourant / dt*

En différentiant l'équation

$- \partial transitale / \partial x$

=

$positance * \partial positale / \partial t$

par rapport au temps on obtient

$-\partial^2 transitale / \partial x\, \partial t$

=

$positance * \partial^2 positale / \partial t^2$

et en différentiant l'équation

$-\partial positale / \partial x$

=

$transitance * \partial transitale / \partial t$

par rapport à l'univers on obtient

$-\partial^2 transitale / \partial x \partial t$

=

$$transitance * \partial^2 positale / \partial x^2$$

La combinaison des deux équations donne l'équation

$$\partial^2 positale / \partial x^2$$

$$=$$

$$positance * transitance * \partial^2 positale / \partial t^2$$

qui est connue sous le nom de

équation d'onde

Pour prédire la positale transitoire le long du champ monodimensionnel, les positales en

$$x = x_0$$

et en

$$x = x_1$$

doivent être connues en tous temps comme dans l'équation de Laplace et dans l'équation de diffusion

Et, en plus, deux conditions initiales sont nécessaires

Ces conditions initiales corrspondent à la positale et la transitale en toute position du système à l'instant initial

$$t = t_0$$

Cela peut correspondre à une spécification de la positale

$$positale(x, t_0)$$

et à un taux de changement de la positale

$$\partial positale(x, t_0) / \partial t$$

Les systèmes bi-dimensionnels et tri-dimensionnels représentés par l'équation d'onde possèdent des réservoirs distribués de positale et de transitale respectivement dans un plan et dans une région volumique

L'analyse ci-dessus est directement applicable à de tels systèmes et donne

différentielle ** positale*

=

$k * \partial^2 positale / \partial t^2$

En général l'équation d'onde est applicable aux systèmes qui possèdent à la fois des réservoirs de positale et de transitale mais n'ont pas d'amortissement, pas de dissipation

La présence des deux types de réservoir implique un échange de matière et d'énergie entre les réservoirs

Aucune des énergies appliquées au système ou présente dans le système initialement ne peut être perdue puisqu'il n'y a pas de dissipance

Elle ne peuvent qu'être échangée d'énergie positale en énergie transitale

C'est ce qui donne naissance aux formes familières des ondes (vagues) et des vibrations

Dans l'équation de diffusion la constante *k* est conçue comme une constante de temps, comme

le taux auquel des conditions stationnaires ou stables sont approchées

La signification de la constant *k* dans l'équation d'onde est différente puisque de toute évidence aucun équilibre ne peut être atteint dans un tel système

Dans l'équation d'onde la constante *k* détermine

la vitesse avec laquelle une perturbation est propagée

Plus le produit

*positance * transitance*

est petit et plus la constante *k* est petite c'est-à-dire que plus le plein effet d'un changement soudain d'excitation

positale(t)

à une extrêmité du système est ressentie à l'autre extrêmité

Dans les systèmes électriques, l'équation d'onde apparait quand l'inductance et la capacitance mais pas de résistance sont présentes

C'est approximativement le cas dans les lignes de transmission idéales

En dynamique, des mouvement d'onde purs interviennent quand des forces de masse inertielle et des forces élastiques sont présentes et l'amortisssement visqueux est négligeable

Les cordes vibrantes peuvent aussi présenter de tels comportements

En dynamique des fluides

- le stockage de transitale est associé à l'inertie des particules fluides individuelles

et

- le stockage de positale dans un fluide implique la compression du fluide

Si les forces visqueuses dans le système fluide sont négligeables par rapport au forces d'inertie et que le fluide est compressible l'équation d'onde est probablement utilisable

Le mouvement d'ondes dans des fluides est fréquement observé comme des ondes sonores dans l'air ou dans l'eau

En électromagnétique l'équation d'onde s'applique à ces systèmes dans lesquels la conductivité est négligeable mais contiennent des propriétés de perméabilité et de diélectricité appréciables

C'est le cas du vide et de la plupart des matériaux non-métalliques

L'équation d'onde amortie

Les systèmes contenant les deux types de stockage de positale et de transitale ont été considérés

De nombreux systèmes contiennent des stockages mais aussi une dissipation non négligeable

Pour dériver l'équation les représentant il faut ajouter la dissipance

Pour être totalement généraux il faut fournir deux types de dissipance

- la dissipance série qui affecte la dissipation d'énergie en vertue de la transitale

et

- la dissipance parallèle qui mène à une baisse d'énergie par fuite

Dans les transmissions électriques, les lignes ont une résistance série appréciable ainsi qu'une inductance et une conductance de fuite appréciable entre les deux lignes et un couplage diélectrique

Dans ce cas, en appliquant le principe de conservation pour explimer le changement de transitale le long de l'axe *x*

$\boldsymbol{transitale_1 - transitale_2}$

il est nécessaire d'introduire un transfert d'énergie dans le réservoir d'énergie positale tout comme dans l'élément dissipatif parallèle

$$-\partial \boldsymbol{transitale} / \partial x$$

$$=$$

$$1/dissipanceParallèle * positale + positance * \partial positale / \partial t$$

positance est la capacité du réservoir par unité de longueur

et

dissipanceParallèle est la dissipation parallèle par unité de longueur

De manière similaire le gradient de positale devient

$$-\partial positale / \partial x$$

$$=$$

$$1/dissipanceSérie * \boldsymbol{transitale} + transitance * \partial \boldsymbol{transitale} / \partial t$$

Ces équations sont des généralisations des équations électriques

courant

$$=$$

$$potentiel / résistance + capacitance * dpotentiel / dt$$

et

potentiel

$$=$$

*courant * résistance + inductance * dcourant / dt*

Les équations précédentes ont deux inconnues *positale* et *transitale*

La résolution simultanée de ces deux équations pour *positale* donne

$\partial^2 positale / \partial t^2$

=

*positance * transitance*

+

*(dissipanceParalléle * positance + transitance * dissipanceSérie) * ∂positale / ∂t*

+

*dissipanceParallèle * dissipanceSérie * positale*

C'est l'expression la plus générale pour représenter les champs monodimensionnels

Cette équation est parfois nommée

équation du télégraphe

car elle décrit la distribution du voltage le long d'un ligne de transmission télégraphique

Il est clair que si les deux dissipations sont nulles l'équation se réduit à l'équation d'onde

Si trois des quatres paramètres *transitance, positance, dissipanceParallèle, dissipanceSérie* sont nuls l'équation devient l'équation de Laplace

En termes plus généraux l'équation peut être écrite comme

différentielle^2 * *positale*

=

$k1 * \partial^2 positale / \partial t^2 + k2 * \partial positale / \partial t + k3 * positale$

et nécessite les même conditions à la frontière et initiale que l'équation d'onde

La réponse caractéristique à un choc (step, saut) à une frontière des systèmes représentés par une telle équation est une oscillation amortie, c'est-à-dire une condition d'équilibre graduellement approchée

Cette approche n'est pas nécéssairement monotone comme dans le cas de la diffusion mais peut impliquer des dépassements et des oscillations autour de l'état d'équilibre

Dans cette mesure cette équation correspond à celle des systèmes concentrés (ODE) contenant de la dissipance, de la positance et de la transitant et présentent des comportements pouvant être

- sous-amortis

- critiquement amortis

et

- sur-amortis

En plus des lignes de transmission électriques l'équation d'onde amortie trouve des applications pour ces systèmes dans lequel les trois types de paramètres sont présents

Dans les univers dynamiques, cette équation représente le mouvement des point dans l'univers

Une corde élastique ou une plaque élastique répondent souvent à un coup (choc) soudain par des ondes sinusoidales qui s'amortissent graduellement

Dans les systèmes fluides où le fluide est compressible et à la fois les forces d'inertie et les forces visqueuses sont appréciables, l'équation d'onde amortie s'applique à nouveau

De même dans les problèmes de champ électromagnétique où les systèmes contiennent une perméabilité, des propriétés diélectriques et de la conductivité ces derniers sont représentables par une telle équation

différentielle^2 * *positale*

=

$$k1 * \partial^2 positale / \partial t^2 + k2 * \partial positale / \partial t + k3 * positale$$

Les équations biharmoniques (245)

Une classe spéciale d'équation est nécessaire pour représenter l'élasticité

Ces équations sont en général similaires aux équations élliptiques, paraboliques et hyperboliques mais contiennent des différentielles universales de quatrième ordre au lieu de deuxième ordre

Cette complication provient du fait que dans l'analyse du stress la variable transitale (le stress) n'est pas une flèche comme dans les exemples précédents mais un carré (un tenseur)

Pour spécifier complètement

une flèche

comme celle de

un courant électrique

ou de

un flot de chaleur

il est nécessaire de connaitre uniquement la taille et la direction de la flèche

Dans le cas d'une quantité cubique (tensorielle) il faut fournir de l'information complémentaire

Pour un cube, six composantes doivent être connues avant que le stress ne soit complètement défini dont

- trois sont identiques à celles d'une flèche

- les trois autres sont nécessaires pour définir un plan auquel le stress est référé

Dans l'analyse du stress on est réellement concerné par deux types de stress

- le stress normal

et

- le stess tranchant

Une spécification du stress total contient plus d'information qu'un courant en électricité ou un flot de chaleur dans un système thermique

La loi de base de l'élasticité correspondant au principe général de conservation sont les conditions d'équilibre et de compatibilité

Dans l'utilisation générale de ces équations reliant le stress et la déformation d'un corps élastique il est pratique de définir le stress comme une fonction *fonction* selon

$$\partial^2 stress / \partial x^2$$

=

$stressNormal_x$

et

$\partial^2 stress / \partial y^2$

=

$stressNormal_y$

et

$\partial^2 stress / \partial x \partial y$

=

$stressTranchant_{xy}$

En conditions statiques l'équilibre et la compatibilité mènent à la dite équation biharmonique de forme

$\partial^4 stress / \partial x^4$

=

0

à une dimension et

$\partial^4 stress / \partial x^4 + 2 * \partial^4 stress / \partial x^2 \partial y^2 + \partial^4 stress / \partial y^4$

=

0

à deux dimensions

Ces équations sont des équations élliptiques approximativement équivalentes à l'équation de Laplace

La partie gauche de l'équation peut être abbrègée par l'opérateur biharmonique

différentielle^4 ** stress*

=

0

Dans les problèmes de stress le poids de la poutre ou de la plaque étudiée correspondent à des endostress distribuées

Quand le poids d'une pièce élastique est appréciable l'équation est modifiée pour devenir

$\boldsymbol{nabla}^4 * stress$

=

charge

où ***charge*** est la charge par unité de longueur ou de surface

En condition transitoires les forces élastiques caractérisées par le module de Young entrent en jeu et les vibrations sont décrites par

$\boldsymbol{nabla}^4 * stress$

=

$k * \partial^2 stress / \partial t^2$

Dans des formulations plus complètes l'équation peut être augmentée par des termes proportionnels à

$\partial stress / \partial t$

et

stress

Résumé (247)

Le but de la présentation était de monter comment des équations aux dérivées partielles représentant un phénomène pouvaient être conçues directement à partir de considérations logiques

Ces raisonnements sont limités à des univers gouvernés d'une manière ou d'une autre par les principes de base de conservation et de continuité

Une telle méthode suit la démarche suivante

- identifier les transitales et les positales

en sachant que les positales sont généralement des différences algébriques entre deux quantités numériques

et que

les transitales sont généralement des flèches

- examiner les caractéristiques du champ pour déterminer les types de paramètres qui sont présents et qui ne peuvent pas être négligés dans l'analyse

- écrire les équation pertinentes en notant les combinaisons de paramètres présents

Ici le symbole

différentielle^{2}

est utile en spécifiant de manière compacte que la variable dépendante doit être différentiée deux fois par rapport à chaque variable indépendante et que la somme des différentielles secondes doit être prise en compte

- modifier l'équation de base pour tenir compte des endotransitales internes distribuées qui pourraient être présentes

- spécifier les conditions à la frontière et les conditions initiales

Les conditions à la frontière doivent spécifier complètement et de manière unique la positale ou le gradient de positale sur toute frontière du domaine considéré

Cette spécification prend la forme

- soit d'une positale constante

- soit d'une différentielle (gradient) de positale constante

La condition initiale doit spécifier l'énergie stockée par tout réservoir d'énergie présent dans le champ

Si en plus du terme bi-différentiel l'équation aux dérivées partielles contient une différentielle première par rapport au temps, une condition initiale est nécessaire en chaque point du champ

Si l'équation inclus une différentielle seconde par rapport au temps, deux conditions initiales sont requises