Analyse

Pratique

Gianni Mocellin

Straco
www.straco.ch
13.06.1991

Bilans différentiels

L'existence e_{c_i} totale d'une caractéristique c indicée par i présente dans le domaine d'étude est égale à l'intégrale sur le domaine considéré de la densité ponctuelle de caractéristique présentes ε_{c_i} :

$$e_{c_i} = \int_{Domaine} \varepsilon_{c_i} \cdot dDomain$$

La bivergence totale de caractéristique β_{c_i}, c'est à dire la caractéristique totale provenant des sources et des puits contenus dans le domaine considéré, est égale à l'intégrale des bivergences sur le domaine considéré:

$$b_{c_i} = \int_{Domaine} \beta_{c_i} \cdot dDomain$$

Le flot f_{c_i} à travers la frontière du domaine considéré peut être spécifié en terme de densité de flot de frontière $\overrightarrow{\varphi_{c_i\,j}}$ et le flot total à travers la frontière est l'intégrale:

$$f_{c_i} = \oint_{Frontière} \overrightarrow{\varphi_{c_i\,j}} \bullet \overrightarrow{dFrontièr}$$

Si le potentiel correspondant au flot de la caractéristique est un scalaire, nous pouvons en obtenir le vecteur gradient:

$$\overrightarrow{grad\,p_{c_i\,j}} = \vec{\nabla} \cdot p_{c_i\,j}$$

La densité du flot de caractéristique i est alors le produit du dit gradient du potentiel j par le coefficient de conduction par le milieu de la caractéristique i:

$$\overrightarrow{\varphi_{c_i}} = \sum_{j=1}^{n-1} \left[R_{ij}\right] \cdot \overrightarrow{grad\,p_{c_i\,j}}$$

$$\overrightarrow{\varphi_{c_i}} = \sum_{j=1}^{n-1} \left[R_{ij}\right] \cdot \vec{\nabla} \cdot p_{c_i\,j}$$

On peut écrire un bilan de l'existence de la caractéristique i dans le domaine d'étude:

$$\frac{d}{dt} \int_{Domaine} \varepsilon_{c_{i\,j}} \cdot dDomaine = \int_{Domaine} \beta_{c_i} \cdot dDomaine - \oint_{Frontière} \overrightarrow{\varphi_{c_i}} \bullet \overrightarrow{dFrontièr}$$

L'intégrale à travers une frontière fermée peut être transformée en une intégrale de domaine car l'intégrale d'un vecteur à travers une frontière fermée est égale à l'intégrale dans le domaine de la divergence du dit vecteur, la densité de flot n'étant rien d'autre que la divergence de la densité de courant de frontière $\overrightarrow{\varphi_{c_i}}$:

$$\oint_{Frontière} \overrightarrow{\varphi_{c_i}} \bullet dFrontière = \int_{Domaine} div \overrightarrow{\varphi_{c_i}} \cdot dDomain$$

$$\oint_{Frontière} \overrightarrow{\varphi_{c_i}} \bullet dFrontière = \int_{Domaine} \vec{\nabla} \bullet \overrightarrow{\varphi_{c_i}} \cdot dDomain$$

Nous pouvons maintenant écrire le bilan d'existence entièrement en terme d'intégrale de domaine:

$$\frac{d}{dt} \int_{Domaine} \varepsilon_{c_i} \cdot dVolume = \int_{Domaine} \beta_{c_i} \cdot dDomaine - \int_{Domaine} \vec{\nabla} \bullet \overrightarrow{\varphi_{c_i}} \cdot dDomain$$

$$\int_{Domaine} \left(\frac{\partial \varepsilon_{c_i}}{\partial t} + div \overrightarrow{\varphi_{c_i}} - \beta_{c_i} \right) \cdot dDomaine = 0$$

$$\int_{Domaine} \left(\frac{\partial \varepsilon_{c_i}}{\partial t} + \vec{\nabla} \bullet \overrightarrow{\varphi_{c_i}} - \beta_{c_i} \right) \cdot dDomaine = 0$$

Pour que l'intégrale soit nulle quelle que soit la limite d'intégration, c'est à dire le domaine considéré, il faut que:

$$\frac{\partial \varepsilon_{c_i}}{\partial t} + div \overrightarrow{\varphi_{c_i}} = \beta_{c_i}$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{c_i}}{\partial t} + \vec{\nabla} \bullet \overrightarrow{\varphi_{c_i}} = \beta_{c_i}$$

Si on considère que le flot est du à une multiplicité de potentiels:

$$\frac{\partial \varepsilon_{c_i}}{\partial t} + div \left(\sum_{j=1}^{n-1} \left[R_{ij} \right] \cdot \overrightarrow{grad\, p_{c_i\, j}} \right) = \beta_{c_i}$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{c_i}}{\partial t} + \vec{\nabla} \bullet \left(\sum_{j=1}^{n-1} \left[R_{ij} \right] \cdot \vec{\nabla} \cdot p_{c_i\, j} \right) = \beta_{c_i}$$

Si le milieu portant la caractéristique considérée est lui même en mouvement avec une vitesse $\vec{w}$, il faut ajouter un flot convectif des caractéristiques existantes au flot provoqué par le gradient de potentiel:

$$\overrightarrow{\varphi_{c_i\,j}} = \varepsilon_{c_i} \cdot \vec{w} + \sum_{j=1}^{n-1} \left[R_{ij} \right] \cdot \overrightarrow{grad\, p_{c_i\,j}}$$

Et l'équation de continuité devient:

$$\frac{\partial \varepsilon_{c_i}}{\partial t} + div \left(\varepsilon_{c_i} \cdot \vec{w} + \sum_{j=1}^{n-1} \left[R_{ij} \right] \cdot \overrightarrow{grad\, p_{c_i\,j}} \right) = \beta_{c_i}$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{c_i}}{\partial t} + \vec{\nabla} \bullet \left(\varepsilon_{c_i} \cdot \vec{w} + \sum_{j=1}^{n-1} \left[R_{ij} \right] \cdot \vec{\nabla} \cdot p_{c_i\,j} \right) = \beta_{c_i}$$

Réticulation

Il existe deux caractéristiques extensives fondamentales:

- l'énergie E dont la dimension est $[m.d^2.t^{-2}]$, le courant d'énergie étant la puissance, sa dérivée temporelle (E/t); et

- l'information I la dimension est [bit], le courant d'information étant sa puissance, sa dérivée temporelle (I/t).

Nous pouvons construire un tableau des principaux domaines d'interaction énergétique:

Domaine	**Potentiel**	**Flot**
Translation mécanique directe	Vitesse linéaire $[ms^{-1}]$	Force [N]
Translation mécanique inverse	Force [N]	Vitesse linéaire $[m.s^{-1}]$
Rotation mécanique directe	Fréquence de rotation $[rad.s^{-1}]$	Couple [N.m]
Rotation mécanique inverse	Couple [N.m]	Fréquence de rotation $[rad.s^{-1}]$
Fluidique et acoustique	Pressure $[N.m^{-2}]$ or $[J.m^{-3}]$	Déformation volumique $[m^3.s^{-1}]$
Electricité	Champ électrique D [V]	Courant électrique D [A]
Magnétisme	Champ magnétique H [A]	Flux magnétique B $[Wb.s^{-1}]$
Thermique	Température [K]	Flot d'entropie $[W.K^{-1}]$ or $[J.K^{-1}.\ s^{-1}]$
Chimie	Potentiel chimique $[J.Kg^{-1}]$	Flot de masse $[Kg.s^{-1}]$
Evolution directe	Tenseur de variation $[Evolution.s^{-1}]$	Tenseur de potentiel [Contrainte]
Evolution inverse	Tenseur de potentiel [Contrainte]	Tenseur de variation $[Evolution.s^{-1}]$

Tableau 1: Efforts et flots de différents domaines de la thermodynamique